

EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



Progresiones de aprendizaje
del recurso sociocognitivo
**Pensamiento
matemático**



Leticia Ramírez Amaya
Secretaria de Educación Pública

Nora Ruvalcaba Gámez
Subsecretaria de Educación Media Superior

Silvia Aguilar Martínez
Coordinadora Sectorial de Fortalecimiento Académico

Primera edición, 2023

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Av. Universidad 1200, Col. Xoco.
Benito Juárez, C.P. 03330, Ciudad de México (CDMX).
Distribución gratuita. Prohibida su venta.



Contenido

I.	Presentación y diagnóstico	4
1.1.	¿Por qué el cambio?	6
1.2.	¿Cómo se enseñaba hasta ahora? Sus deficiencias y críticas	8
1.3.	¿Qué falta para la formación integral de las y los estudiantes?	10
II.	Justificación	13
III.	Fundamentos	16
IV.	Propuesta de cambio	19
4.1.	Definición de pensamiento matemático	19
4.2.	¿Qué se propone y por qué?	19
4.3.	Propósitos del recurso	22
V.	Conceptos básicos del recurso	25
5.1.	Categorías y subcategorías	26
5.2.	Transversalidad	32
5.3.	Perfil de egreso: aprendizajes de trayectoria	34
VI.	Progresiones de aprendizaje	39
6.1.	Primer semestre – Pensamiento estadístico y probabilístico	44
6.1.1.	Temática general	44
6.1.2.	Aplicación disciplinar	44
6.1.3.	Metas, categorías y progresiones	45
6.2.	Segundo semestre – Pensamiento aritmético, algebraico y geométrico	50
6.2.1.	Temática general	50
6.2.2.	Aplicación disciplinar	51
6.2.3.	Metas, categorías y progresiones	52
6.3.	Tercer semestre – Pensamiento variacional	57
6.3.1.	Temática general	57
6.3.2.	Aplicación disciplinar	58
6.3.3.	Metas, categorías y progresiones	59
VII.	Anexo	65
VIII.	Referencias documentales	73



I. Presentación y diagnóstico

El Pensamiento Matemático se incluye dentro del nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) como un recurso sociocognitivo, con la finalidad de lograr una formación humana e integral para todas y todos los jóvenes de México.

Se concibe al pensamiento matemático de manea amplia: la matemática deja de ser únicamente un conjunto de algoritmos que muchas veces son aplicados de manera mecánica y descontextualizada, para convertirse en un medio a través del cual el estudiantado pueda trabajar en la adquisición y mejoramiento de habilidades y destrezas del pensamiento tales como observar, intuir, conjeturar, argumentar, la capacidad para modelar y entender, a través del lenguaje matemático, algunos fenómenos sociales, naturales e incluso de su vida personal.

El pensamiento matemático entendido así apoya a las y los jóvenes en la construcción de un pensamiento flexible y crítico, el cual les será de utilidad sea cual sea el derrotero que elijan al finalizar el bachillerato, tanto si deciden continuar con sus estudios profesionales, así como si optan por incorporarse al mercado de trabajo.

Se vuelve necesario enseñar desde un enfoque activo, poniendo a las y los estudiantes al centro del proceso de enseñanza-aprendizaje, aunado a esto la enseñanza con perspectiva socioemocional es fundamental para lograr un mejor desarrollo en ambientes de aprendizaje donde exista una confianza mutua.

El pensamiento matemático tiene un carácter transversal y comparte junto con otros recursos sociocognitivos la función de ampliar, potenciar y consolidar el conocimiento de otras áreas, sin que por ello se pierda su identidad y autonomía, así pues, se ha considerado en la propuesta el trabajo colaborativo con otros recursos y áreas de conocimiento, lo cual no sólo hace que el aprendizaje de la



matemática sea más significativo para el estudiantado, sino que además le ayuda a desarrollar habilidades socioemocionales.

La forma en que se describe este recurso sociocognitivo es a través de categorías y subcategorías, las cuales son conceptualizaciones que buscan abarcar los procesos cognitivos complejos que ocurren cuando una persona participa del pensamiento matemático. Las cuatro categorías que se han establecido son: la procedural, procesos de razonamiento, resolución y modelación de problemas e interacción y lenguaje matemático.

En resumen, la propuesta pone el énfasis en las habilidades que puedan desarrollarse a través del pensamiento matemático y no tanto en el contenido, aunque también es cierto que no es posible enseñar pensamiento matemático sin matemáticas: es necesario construir sobre la base de algún contenido, su elección no ha sido fortuita pues se buscó que éste fuera significativo para las y los estudiantes.

La presentación curricular del pensamiento matemático se hace a través de progresiones de aprendizaje, desde esta perspectiva se asume una posición constructivista, centrada en las y los estudiantes, en la que se apela a sus experiencias y conocimientos previos, se refuerzan los mismos y se construyen de manera orgánica nuevos conocimientos haciendo uso de la imaginación, procediendo intuitivamente y utilizando métodos heurísticos y considerando posteriormente un proceso de formalización.

En estas páginas se encontrará la propuesta de los tres primeros semestres del bachillerato de pensamiento matemático, dependerá de las necesidades de cada subsistema la forma en que se aborde la matemática o el pensamiento matemático en semestres posteriores. En estos tres primeros semestres se ha buscado cubrir lo fundamental para lograr una formación integral de un ser



humano: pensamiento estadístico y probabilístico, pensamiento aritmético, algebraico y geométrico y el pensamiento variacional.

La propuesta que se presenta en estas páginas es el resultado del trabajo colaborativo de maestras y maestros, especialistas, estudiantes y diversos actores involucrados en la educación del bachillerato.

1.1. ¿Por qué el cambio?

A continuación, se mencionan algunas situaciones actuales por las cuales el cambio se vuelve necesario.

La importancia del pensamiento matemático en la formación humana

Actualmente se enseñan matemáticas con el propósito de adquirir una serie de conocimientos y saberes que rara vez encuentran cabida en la vida del estudiantado, salvo en el caso de aquellas y aquellos egresados que opten por estudiar una carrera relacionada con el campo de las matemáticas. No se debe descuidar la adquisición de estos saberes, pero el enfoque debe ser más amplio y contemplar a la totalidad de las y los estudiantes, en otras palabras, debemos adoptar un enfoque eminentemente humanista en el que se busque que al finalizar este trayecto educativo el pensamiento matemático aporte a la formación humana de nuestras y nuestros jóvenes.

La enseñanza de la matemática con una visión limitada y poco útil

El pensamiento matemático tiene en la actualidad poca presencia en el aula donde fundamentalmente se trabaja la disciplina matemática a través de la enseñanza de operaciones más o menos complejas, en muchas ocasiones sin que éstas tengan una clara vinculación entre sí, además de aparecer descontextualizadas de la realidad. Las y los estudiantes reciben una enseñanza



que busca la mecanización de procesos algorítmicos, pero se desaprovecha la oportunidad de favorecer en ellas y ellos habilidades relacionadas con el pensamiento matemático.

Bajo desempeño en matemáticas

Los resultados de la aplicación de instrumentos internacionales de medición como lo es el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), muestran que el puntaje promedio en Matemáticas, en la mayor parte de los países y economías participantes, se ubica entre 482 y 545 puntos; mientras que los resultados de las y los estudiantes mexicanos se ubican en el rango de 358 a 420 puntos, con un promedio de 409 puntos y una desviación estándar de 84 (Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación, 2020). Los resultados de PISA 2018, muestran que en matemáticas estamos 80 puntos abajo del promedio de OCDE. En lo relativo a las evaluaciones nacionales, Osuna (2020) establece que los resultados de PLANEA son desalentadores y revelan el escaso conocimiento matemático que están logrando el estudiantado de Educación Media Superior (EMS).

Los resultados de la prueba PISA y los comentarios del profesorado indican que las prácticas docentes y ejercicios asignados actualmente al estudiantado de la EMS no alcanzan el nivel argumentativo, ya que el tiempo se consume en cubrir los programas saturados de contenido.

Falta de tiempo y espacios para desarrollar el pensamiento matemático

La gran cantidad de contenidos en los temarios hacen que los temas se revisen de forma superficial y no se reflexione a mayor profundidad en aspectos importantes de los mismos; por lo regular, solo se hacen aplicaciones sencillas de lo revisado en el aula y no se justifican ni argumentan los resultados.

La reflexión, argumentación y comparación, elementos fundamentales del pensamiento matemático, tienen un mínimo espacio en las clases. Las



soluciones de los ejercicios se obtienen por métodos específicos y son escasas las oportunidades para contrastar o validar las obtenidas por otro método; además ni se dan argumentos a favor o en contra de su uso.

En resumen, en la actualidad se pone un mayor énfasis en la enseñanza de contenido con el fin de cubrir un temario y no en el desarrollo de habilidades que pueden resultar de gran utilidad para la totalidad de las y los estudiantes.

El disgusto por la materia es un factor de deserción

El pensamiento matemático tiene gran utilidad en la vida fuera de la escuela, particularmente en la toma de decisiones, ya que permite comprender las leyes de las ciencias que usualmente recurren al lenguaje de la matemática para expresarse; además facilita estructurar sus teorías y también aporta procedimientos válidos y aplicables a distintos objetos matemáticos y de la realidad cotidiana, a la explicación de fenómenos o a la solución de situaciones problema de otras áreas de conocimiento o en el ámbito artístico, deportivo, social e incluso emocional. Sin embargo, la matemática, a pesar de ofrecer tanto, suele tener un rechazo considerable en el estudiantado (Peña, 2002). Dicho rechazo, en un extremo, puede ser incluso causal de deserción.

1.2. ¿Cómo se enseñaba hasta ahora? Sus deficiencias y críticas

Al analizar los planes y programas de estudio vigentes (Planes de Estudio de Referencia del MCC de la EMS, 2018) y los programas de los Subsistemas que integran la EMS, se encuentra que la Matemática está presente al menos en cuatro semestres con cuatro, cinco o seis horas semanales, en las asignaturas de las áreas de *formación básica*.

En la propuesta 2018 el pensamiento matemático es considerado un ámbito, al igual que el pensamiento crítico; también se hace referencia al pensamiento



matemático como uno de los cinco campos disciplinares al que le corresponde el grupo de asignaturas: “Álgebra, Aritmética, Cálculo, Trigonometría y Estadística”. En la revisión efectuada no se detecta problema por carencia de horas, por lo cual **es viable incluir el pensamiento matemático en los primeros tres semestres, si se asocia a contenidos matemáticos primordiales y se dejan otros para las matemáticas de los semestres superiores.**

Se estudian conceptos, técnicas y lenguaje específico y con ello se espera que se alcance el perfil de egreso relacionado con el pensamiento matemático, aunque esto no siempre ocurre de manera directa. Por otro lado, el enfoque basado en la solución de problemas y la enseñanza de matemáticas en contexto, declarado en el modelo educativo basado en competencias no se sostiene si no se incluyen en los programas contenidos que promuevan el desarrollo de habilidades de razonamiento, solución de problemas o modelación, además de dedicar tiempo a la reflexión que conduzca hacia la metacognición.

No se detectan del todo contenidos que brinden experiencias atractivas que trasciendan y sean comprendidas por el estudiantado. Con frecuencia, el estudiantado memoriza y ejecuta procedimientos aislados que no entiende a cabalidad y no siempre los aplica en situaciones significativas, esto le provoca frustración y resistencia hacia las matemáticas, incluso, le puede conducir a abandonar la escuela, como lo menciona Miranda (2018) quien cita entre las razones del abandono, a la reprobación y a la falta de interés en los estudios.

Puede decirse que los planes y programas actuales se basan en conceptos fragmentados más que en el desarrollo del pensamiento matemático y no hay transiciones adecuadas entre los tipos de pensamiento involucrados (por ejemplo, entre pensamiento aritmético y pensamiento algebraico), lo que conduce a reducirlos a conceptos y procesos mecánicos e independientes entre sí; por otra parte, como se abordan múltiples contenidos y separados de su aplicación, el tratamiento actual en lo general resulta inadecuado.



La “forma tradicional de enseñanza de las matemáticas”, se caracteriza como refiere Merino (2016), por tener un método cerrado, en gran parte se basa en las cifras, ya que se realizan múltiples operaciones. Las operaciones y los ejemplos aritméticos son tan abundantes que el alumnado muchas veces confunde “hacer matemáticas” con “hacer cuentas”. Las operaciones se presentan como la parte más activa, pero se realizan de manera mecánica y el alumnado no entiende realmente los conceptos y los procedimientos solo intenta repetirlos. En general, se puede señalar que, en la enseñanza de la matemática bajo el enfoque tradicional, el rol del profesorado se centra en preparar y transmitir información a la comunidad estudiantil, hay poca teoría, las y los docentes explican ejemplos y el rol de las y los estudiantes es recibir y almacenar esa información, para después aplicarla de manera mecánica en ejercicios del mismo tipo.

La metodología predominante es la expositiva. Se considera que el estudiantado debe asumir un rol de receptor, deben mantenerse atento y quieto para aprender en forma gradual, acumulativa y seriada, debido a que la matemática se presenta con un alto nivel de conexión entre los conocimientos donde los nuevos se construyen sobre los conocimientos previos. Por ejemplo, se trabaja la suma aritmética, la suma algebraica, la suma de funciones. Las matemáticas enseñadas así, carecen de atractivo y ejercicios interesantes, mantienen un formato más escolar que vivencial, no guardan relación con la vida diaria, y el eje central del aprendizaje es el libro, un cuadernillo de actividades y los apuntes.

1.3. ¿Qué falta para la formación integral de las y los estudiantes?

La educación en el área de las matemáticas en la actualidad resulta poco atractiva y útil al estudiantado, esto es consecuencia de factores diversos entre los cuales destacan: un entorno social con aversión a las matemáticas, marcos curriculares con múltiples carencias, aproximaciones pedagógicas deficientes.



Ante este panorama, se requieren contenidos interesantes y oportunidades de reto intelectual motivantes que pueden ser proporcionadas por el pensamiento matemático enmarcado por una adecuada práctica pedagógica, en la cual se consideren aprendizajes de trayectoria y progresiones en lugar de mantener el modelo por competencias ya que tal modelo parcializa el proceso en competencias más elementales cuya unión simple no siempre construye la competencia disciplinar deseada. Falta también enfatizar en el estudiantado el desarrollo de elementos como los siguientes:

- **Actitud positiva y crítica**, con iniciativa, curiosidad e interés.
- **Perseverancia** para enfrentarse a problemas y retos intelectuales.
- **Capacidad de trabajo autónomo** e independiente para explorar procedimientos alternativos, heurísticas y aprovechar las aplicaciones digitales para el aprendizaje.
- Disponibilidad **al trabajo colaborativo**, puesto que, en el currículo actual, el desarrollo del pensamiento matemático tiene una perspectiva más individual que colaborativa, pues no se fomenta la socialización de conceptos, dudas, argumentos ni se comunican los procesos de pensamiento por los que se atraviesa.
- Un buen nivel de **adaptabilidad y equidad**. Al respecto, Rojano (2017) menciona lo siguiente:

Se observa una brecha importante entre, el discurso del modelo educativo del nivel medio superior respecto a la intención de asumir la diversidad cultural del país y la posibilidad de adaptar los programas a las diferentes condiciones del enclave de los planteles escolares, y las propuestas concretas de contenidos y sugerencias pedagógicas, las cuales están lejos de cumplir con las condiciones de adaptabilidad y equidad implícitas en el discurso más general. (sic)

- **La emoción** experimentada al resolver un problema.



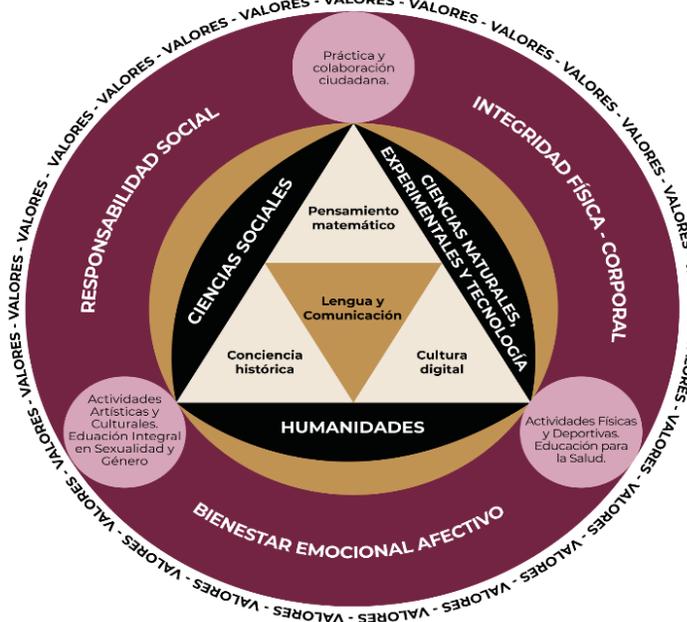
- **La seguridad** que brinda contar con información suficiente y organizada.
- **Relacionar la matemática con la satisfacción y placer**, de forma análoga lo que ocurre tanto en el deporte como en el acto creativo y de percepción artística.
- **El empoderamiento** dado por una **toma de decisiones** bien fundamentada,
- **La posibilidad de hacer un proyecto de vida** basado en el desarrollo personal y colectivo, la ampliación de la base cultural y el poder intelectual para hacer del egresado de EMS, un ser humano con capacidad cognitiva y autonomía para aprender a lo largo de su vida.

II. Justificación

Que destine mi discípulo a la espada, a la Iglesia o a la abogacía, poco me importa. Antes de la vocación de sus padres, la naturaleza le llama a la vida humana. El oficio que quiero enseñarle es el vivir.

Emilio o la educación, Jean-Jacques Rousseau

En esta propuesta el pensamiento matemático se presenta como un recurso sociocognitivo, delimitado por los aspectos socioemocionales y conectado en



forma estrecha con otras áreas de conocimiento. Enfocarse en el pensamiento matemático (desarrollándolo sobre un cierto conjunto de contenidos), en lugar de concentrarse únicamente en el desarrollo de contenidos disciplinares específicos es un cambio relevante en la EMS, este cambio se encuentra en armonía con lo solicitado en el contexto internacional, donde

se pide fortalecer el pensamiento crítico, el aprendizaje holístico, no fragmentado y que las y los egresados sean capaces de pensar y resolver problemas. Este recurso se asocia con la adquisición de habilidades, el aprendizaje de conceptos, procedimientos y lenguaje matemático, es parte del aprendizaje de trayectoria y está determinado por las metas de aprendizaje que consideran el aula, la escuela y la comunidad para impulsar la educación integral del estudiantado y para alcanzar propósitos que trasciendan los aspectos disciplinares, ayudando a promover transformaciones en su economía, en su vida familiar y para que se



sirva de él cuando se enfrenta a diversas problemáticas tanto personales como sociales.

La propuesta se vuelve especialmente relevante al considerar el contexto de cambios acelerados en el que viven nuestras y nuestros estudiantes, en donde no solo un conocimiento disciplinar de la matemática se vuelve necesario para entender el funcionamiento del mundo tanto físico, como social y virtual, sino que también se vuelve necesaria la adquisición de habilidades tanto intelectuales como socioemocionales que pueden desarrollarse a través del pensamiento matemático. En este sentido, para lograr una formación integral de las y los jóvenes, se vuelve indispensable entender al pensamiento matemático en su complejidad, como un recurso en el que se integran de manera dinámica diversos procesos cognitivos que interactúan y se retroalimentan entre sí.

Es evidente que el pensamiento matemático tiene valor dentro y para la propia matemática, aunado a esto, y sin restarle independencia y autonomía, se asume al pensamiento matemático como un recurso sociocognitivo, lo cual significa reconocer su valor para resolver problemas y modelar situaciones de las áreas de conocimiento y del ámbito socioemocional o de la aplicación de los procesos propios del pensamiento en los procesos de desarrollo de esas áreas de conocimiento.

Es una propuesta que encaja perfectamente en lo que Osuna (2020) recomienda para atacar la deserción escolar, debida en parte a la reprobación y al bajo logro académico en esta asignatura.

Ante la existencia de un rezago histórico en los conocimientos, las capacidades y las habilidades de las y los educandos en áreas fundamentales como las matemáticas, la NEM establece como propósito, la excelencia en la enseñanza, por lo que en esta propuesta se busca avanzar en ese sentido a través de: fomentar calidad y creatividad, considerar la enseñanza situada, contextualizar el



pensamiento matemático para aplicarlo significativamente en otras áreas y ámbitos y profundizar en los conocimientos matemáticos.

En general, el pensamiento matemático involucra procesos de reflexión, abstracción y metacognición, cuya ejecución dan al sujeto la posibilidad del autoaprendizaje, incidiendo en **la formación integral de un ser humano.**



III. Fundamentos

La perspectiva centrada en las competencias se presentó como una alternativa en el terreno de la educación, se esperaba que tuviera mejores procesos de formación académica. En México, en el Acuerdo Secretarial 444, se establecen las competencias del Marco Curricular Común para el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), se asume a las competencias disciplinares básicas de las matemáticas como el medio para propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico (SEP, 2017b pp.67-68). Sin embargo, Ángel Díaz-Barriga (2013) había establecido que en matemáticas el *“desarrollo del pensamiento es más complejo que solamente la adquisición de diversos conocimientos, aunque requieren de esos conocimientos”*. Se ha visto también que *“el empleo del término competencias ha dado origen a un lenguaje muy amplio en el terreno de la educación y esta diversificación lleva a promover clasificaciones distintas de las competencias y origina una enorme confusión”*, ante ese panorama, en esta propuesta, tanto las áreas de conocimiento como los recursos sociocognitivos, **no se basan en competencias matemáticas sino en aprendizajes de trayectoria**, éstos conectan los aprendizajes que el estudiantado va adquiriendo durante su formación académica y se plantean **metas de aprendizaje** e instrumentos denominados **progresiones de aprendizaje**.

Las progresiones de aprendizaje son una descripción cualitativa en el **cambio del nivel de sofisticación** del estudiante sobre un concepto clave, proceso, estrategia, práctica o hábito mental. Dicho cambio se puede deber a una variedad de factores como la maduración y la instrucción. Cada progresión se asume **funciona estadísticamente** y es **provisional, sujeta a verificación empírica** y cambios teóricos. (Deane, Sabatini & O Reilly, 2012). El aprendizaje de la matemática muchas veces sucede en forma espiral: el o la estudiante retoman



un concepto equipado con mayores conocimientos y experiencias, lo que hace que este retomar se vuelva más significativo y con un mayor nivel de alcance.

La presente propuesta se fundamenta en el constructivismo para generar un conocimiento matemático, no como una réplica objetiva de una única realidad externa al sujeto, sino como una construcción personal y social de significados, para ello se toma en cuenta el resultado de una evolución histórica, un proceso cultural en permanente desarrollo, situado en un contexto específico (D'Amore, Godino y Fandiño, 2008).

Por otra parte, se retoman los principios para la acción (NCTM, 2014) donde se establece que un programa educativo de matemáticas de excelencia incluye un currículo donde se desarrollan matemáticas relevantes a lo largo de procesos coherentes de aprendizaje y se establecen conexiones entre áreas de estudio de la matemática y entre la matemática y el mundo real. La propuesta está orientada alrededor de los procesos de razonamiento, en lugar de considerar una lista de contenidos matemáticos conceptuales y procedimentales.

Al poner como eje fundamental al pensamiento matemático, se espera que los recursos que lo conforman y que se encuentran representados en las categorías y las subcategorías (desarrolladas para esta propuesta acordes al nivel educativo), hagan una adecuada conexión entre las áreas de la matemática (aritmética, algebra, geometría, cálculo, estadística y probabilidad) y con diferentes áreas de conocimiento.

En esta propuesta se considera importante a la memoria para recuperar conocimientos que por su frecuencia de uso y aplicación se necesitan sin mayor análisis, pero también la memoria tendrá ahora un papel importante para construir nuevos conocimientos no solo para repetir los que ya se tienen. Se buscan aprendizajes profundos en lugar de conocimientos superficiales y se orienta hacia el trabajo creativo en la matemática a través y para la generación de un pensamiento crítico.



En esta propuesta el aprendizaje se inserta en las pedagogías activas, como un aprendizaje significativo que considera las necesidades de la persona que aprende, en un proceso de construcción social y dialógico de significados donde través de la reflexión, el diálogo con los otros y la revisión de situaciones de su contexto encuentra un sentido a los conocimientos conceptuales y procedimentales de la matemática.



IV. Propuesta de cambio

4.1. Definición de pensamiento matemático

El pensamiento matemático es un recurso sociocognitivo que involucra diversas actividades desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta los procesos mentales abstractos que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático, pretende resolver problemas, usar o crear modelos, y le dan la posibilidad de elaborar tanto conjeturas como argumentos; organizar, sustentar y comunicar sus ideas.

Este recurso está descrito a través de cuatro categorías: procedural, procesos de razonamiento, solución de problemas y modelación e interacción y lenguaje matemático.

4.2. ¿Qué se propone y por qué?

A partir del diagnóstico y de la investigación teórica realizada, se hace la propuesta de cambio, en ella existe un área denominada Pensamiento Matemático que se integra al MCCEMS como un recurso sociocognitivo. Los recursos aportados a la formación del sujeto desde el pensamiento matemático son variados y abarcan técnicas, un lenguaje formal, procesos de pensamiento (entre los que destacan observar, intuir, conjeturar y argumentar), diversos métodos y heurísticas para la solución de problemas, la adquisición de habilidades para modelar una situación o fenómeno, formas de simbolizar, organizar y comunicar información, entre otros. También corresponde a esta área, el establecimiento de procesos para la negociación de significados y para comunicar la experiencia vivida.



El pensamiento matemático además busca que las y los estudiantes del bachillerato logren comprender mejor otras áreas de conocimiento y la aplicación del mismo en la toma de decisiones razonadas y en la valoración de la matemática por su belleza, utilidad y como un factor fundamental en la creación de su proyecto de vida.

Así se llevará al estudiantado del nivel medio superior a desarrollar procesos de razonamiento tanto lógicos como intuitivos, a desarrollar la creatividad y la imaginación, la curiosidad y la reflexión con la intención de conducirlo a un mayor nivel intelectual para fomentar el aprendizaje permanente y que éste sea gestionarlo por el propio sujeto.

Se busca desarrollar en el estudiantado un estilo de pensamiento que le permita movilizar conocimientos previos de matemáticas, relacionar las áreas de conocimiento con otros recursos del MCCEMS, tomar mejores decisiones y utilizarlo para comprender e interactuar con el mundo que le rodea ya que se aplica en temas realmente apasionantes para la juventud como la música, el deporte, el azar, el juego, el arte, el manejo de datos, las redes sociales, el desarrollo tecnológico, la moda, el transporte, la construcción, entre otros así como las marcadas por su relevancia en la Agenda 2030 como: la pobreza, el hambre, el saneamiento del agua, la producción y consumo responsable, el surgimiento de ciudades y comunidades sostenibles, la reducción de las desigualdades, la justicia, la innovación para la industria, la vida submarina, entre otras y muchas de ellas podrían ser tema de clase, investigaciones, proyectos, etc.

El pensamiento matemático es uno de los cuatro recursos sociocognitivos del MCCEMS, se le identifica como recurso porque las personas lo emplean de acuerdo con la situación que se le presente.



Propuesta:

1. Incluir en el plan de estudios al Pensamiento Matemático como un recurso sociocognitivo del MCCEMS en los tres primeros semestres. El abordaje de temas matemáticos o del pensamiento matemático en semestres posteriores dependerá de las necesidades cada subsistema.

2. Establecer al Pensamiento Matemático como un recurso sociocognitivo a través del cual se busca favorecer el desarrollo de habilidades y destrezas del estudiantado tales como: la observación, la intuición, la capacidad de conjeturar, la argumentación, su capacidad para emplear el lenguaje matemático en la comunicación de inquietudes y descubrimientos, así como también su uso en la descripción de situaciones y fenómenos.

3. Dotar al pensamiento matemático de una funcionalidad que le permita transversalizar saberes, respetando siempre su identidad y entendiendo que contará con momentos de desarrollo propio pero que también podrá apoyar en la articulación de conocimientos de otras áreas y recursos.

4. Fortalecer procesos mentales de razonamiento a través de la solución de problemáticas planteadas como reto intelectual, con un formato lúdico o de aplicación, que comprendan procesos de complejidad regulada.

5. Cambiar los propósitos actuales establecidos en forma de *competencias por progresiones de aprendizaje y aprendizajes de trayectoria*.

6. Abordar contenido atractivo para la comunidad estudiantil referente a su realidad actual, la historia, las humanidades, las ciencias naturales, experimentales y tecnología, las ciencias sociales o de la propia matemática, con la finalidad de favorecer a través de dicho abordaje el desarrollo de habilidades y destrezas cognitivas y socioemocionales.

7. Incluir actividades lúdicas y conexión con la vida e intereses de la comunidad estudiantil, ver aspectos atractivos del Pensamiento Matemático y de la matemática incluso en otras áreas de conocimiento. La visión anterior debe



formalizarse para que el estudiantado adquiriera conocimiento matemático de calidad.

8. Proponer solución de retos y proyectos (transversales y de la matemática).

9. Contar con un tiempo asignado a sesiones de laboratorio experimental donde el estudiantado experimente en forma individual y colaborativa, realice ejercicios y actividades para promover la conjetura y el cuestionamiento, sugerido por las progresiones. Si se tiene posibilidad, incluir el uso de herramientas digitales para el aprendizaje que fomenten el papel activo y conduzca a investigar, cuestionar, dudar, criticar, crear, solucionar, validar y desarrollar tanto su forma individual como colaborativa de participar del quehacer matemático.

10. Mostrar al estudiantado el potencial de la matemática y el estado actual del trabajo de los matemáticos y de la investigación para despertar su interés en las actividades matemáticas asociadas al desarrollo científico y tecnológico.

Esta propuesta considera que en el nivel medio superior se debe mostrar el poder y la complejidad de la matemática, para romper con la creencia de que la matemática es un cuerpo acabado de saberes; dar una base sólida en contenido y una formación integral a través del Pensamiento Matemático, pedir cierto nivel de rigor y formalización en los procesos, pero sobre todo buscar la reflexión y el avance hacia la solución de problemas actuales de su esfera personal, local, regional, aspirando a desarrollar un PM con una visión universal y de futuro.

4.3. Propósitos del recurso

El pensamiento matemático, en el MCCEMS, posibilita:

- Favorecer en el estudiantado el desarrollo de habilidades relacionadas con la observación, la intuición, la capacidad de conjeturar, la argumentación, la comunicación y socialización de inquietudes intelectuales y soluciones a



problemas, así como la descripción de fenómenos o situaciones mediante el empleo del lenguaje matemático.

- Recuperar una perspectiva histórico-filosófica para ver a la matemática a partir de los contextos que dieron origen a los conceptos y procedimientos, de la integración de procesos de abstracción, argumentación y otros, dando un enfoque amplio contrario al enfoque mecanicista que anula la relevancia de la matemática.
- Responder a motivaciones que pueden estar en el ambiente natural, social, cultural o en el sujeto pensante, para ampliar la visión de la matemática considerando su papel transformador, su dimensión cultural e intelectual que favorezca la formación integral del ser humano.
- Dar un sentido holístico a la formación matemática en la EMS para que el estudiantado alcance una educación de calidad, que incluya contenidos relevantes, actividades pertinentes y retadoras para lograr que le dé seguridad para tomar decisiones, favorezca una postura crítica y un estado emocional que lo impulse hacia el aprendizaje permanente y desarrolle una postura crítica en un marco de respeto a la condición y dignidad humana.
- Incorporar una visión centrada en el estudiante de tal forma que la articulación de saberes, conocimientos y habilidades tenga como eje director el progreso del estudiantado, respetando siempre la coherencia y consistencia de la disciplina.

Propósitos específicos del área

- Integrar a la matemática y al pensamiento matemático como un recurso sociocognitivo de tal forma que el desarrollo de habilidades cognitivas e incluso socioemocionales relacionadas con el pensamiento matemático se lleve a cabo a través del estudio y consideración de contenido que resulte significativo para el estudiantado.



- Apoyar al estudiantado en la explicación del mundo y de su entorno inmediato.
- Considerar el desarrollo del pensamiento matemático como un proceso no necesariamente lineal, posiblemente en espiral, complejo en donde ocurren avances, paradas, rodeos e incluso retrocesos.
- Relacionar al Pensamiento Matemático con otras áreas del conocimiento y con la vida, mediante el empleo de conceptos matemáticos para **“satisfacer las necesidades de la vida diaria que puede tener un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”** (OCDE, 2010, p. 23).



V. Conceptos básicos del recurso

Con la finalidad de describir al pensamiento matemático se establecen cuatro categorías. Las categorías son, en general, unidades integradoras de los procesos cognitivos y experiencias que se refieren, en este caso, al pensamiento matemático; estas categorías son conceptualizaciones que nos permiten analizar el logro de metas de aprendizajes, al tiempo que promueven en la y el estudiante la adquisición de una mayor conciencia acerca de lo que saben y de lo que queda aún por saber, los incentiva a buscar nuevas posibilidades de comprensión y a descubrir conexiones con las demás áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos y recursos socioemocionales.

Las categorías del pensamiento matemático pueden representarse como ciertas parcelas en las que se clasifican los procesos cognitivos asociados al quehacer matemático, sin embargo, hay que tener siempre presente que toda actividad matemática puede ocurrir de manera simultánea dentro de dos o más categorías, de hecho, una práctica significativa del pensamiento matemático implicaría que se lleven a cabo acciones dentro de categorías de forma simultánea.

Se han establecido cuatro categorías del pensamiento matemático: procedural, procesos de razonamiento, modelación y solución de problemas e interacción y lenguaje matemático. Cada una de estas categorías se articula a través de subcategorías que se describirán más adelante. Recalcamos que los procesos cognitivos asociados al pensamiento matemático ocurren muchas veces participando de dos o más categorías entre las que se da una retroalimentación de manera dinámica.

Desde el punto de vista pedagógico, las categorías orientan nuestra práctica docente al poner en consideración la atención del desarrollo de habilidades asociadas al pensamiento matemático a través del trabajo y favorecimiento de éstas.

En la enseñanza tradicional de la matemática se identifica predominantemente la presencia de la categoría procedural, por lo que una parte fundamental de la propuesta consiste en, sin dejar de atender esta categoría, buscar favorecer el desarrollo de las otras tres.

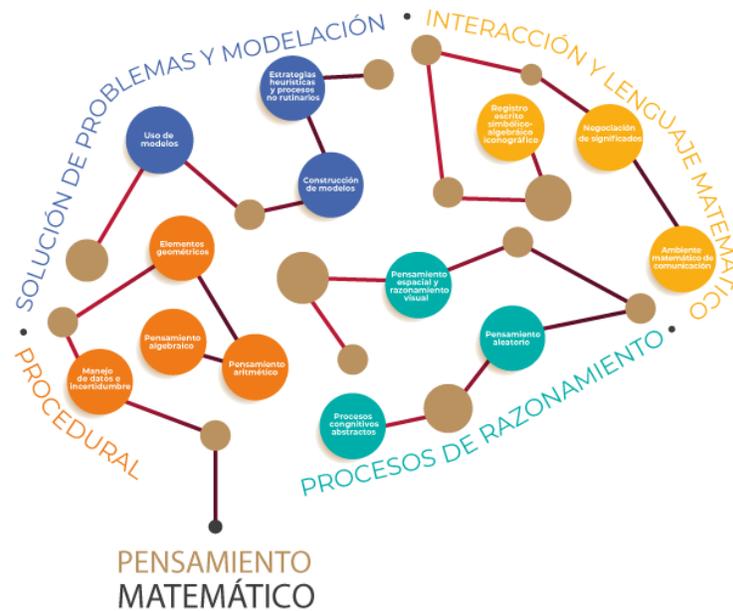


Figura 1. Pensamiento Matemático. **Categorías y Subcategorías.**

A través de estas categorías podemos describir el proceso de aprendizaje del estudiantado, el cual identifica, organiza, conjetura, comprende, interpreta, demuestra, resuelve, justifica, modela, entre otras diversas acciones, para dirigirse así hacia el logro de las metas de aprendizaje, éstas se alcanzan en forma gradual ejecutando complejos procesos de pensamiento que lo enriquecen (intuición, reflexión, experimentación, argumentación, validación y metacognición, entre otros) y le dan la potencialidad y versatilidad para ir de la concreción a la abstracción y generalización durante el aprendizaje, dando oportunidad de integrar a los conocimientos nuevos a los previos para ampliar su red de conocimientos matemáticos y poder aplicarlos en otros contextos.

5.1. Categorías y subcategorías

A continuación, describiremos brevemente cada una de las categorías del pensamiento matemático junto con las subcategorías que la comprenden.



Categoría I. Procedural

Se refiere al conjunto de procedimientos matemáticos, algorítmicos y heurísticos, entendidos, como un "saber hacer" automático e inmediato que le posibilita al estudiante dar una respuesta ante un cuestionamiento o situación-problema.

Subcategorías:

Pensamiento aritmético

Procesos de pensamiento basados en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; el sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación.

Pensamiento algebraico

Tipo de pensamiento complejo que involucra la comprensión de las relaciones numéricas y funcionales, los patrones, su generalización, incluye el uso de estructuras y símbolos para formalizar abstracciones y generalizaciones.

Elementos geométricos

Los elementos geométricos consideran puntos, líneas, figuras, planos, espacios, etc. Algunas veces relacionados con propiedades o con sistemas de referencia mediante el uso de coordenadas y/o magnitudes.

Manejo de datos e incertidumbre

Considera el uso e interpretación de datos y el cálculo de sus posibilidades de ocurrencia. Incluye desde la recolección de datos, la revisión de los términos básicos utilizados en probabilidad y estadística y las formas en que se recolectan datos a partir de una necesidad específica, así como las ventajas de elegir una forma para organizarlos, interpretarlos y utilizarlos en la toma de decisiones en



ambientes de incertidumbre.

La primera categoría constituye un grupo inicial de recursos y corresponden al dominio de los **recursos procedurales**, lleva a describir y ejecutar procedimientos matemáticos, en forma sintética o extendida, automatizada o como una secuencia razonada de pasos. En las diferentes áreas de la matemática hay formas de hacer, de resolver, de simplificar, etc., por eso su contenido se vuelve un valioso recurso al emplearlos en la solución de problemas y en la toma de decisiones.

Otros importantes recursos se presentan cuando se enfrenta una situación problemática y se “piensa en ella” detonando una serie de procesos mentales, ya sea para comprenderla o para resolverla, tales procesos se agrupan en la segunda categoría.

Categoría 2. Procesos de Razonamiento

Conjunto de procesos complejos, que pueden ser de diferente naturaleza ya sea intuitiva o lógica, que permiten relacionar, vincular, comparar y analizar información en forma estructurada, a partir de un conjunto de premisas, establecer conjeturas, diseñar estrategias, elaborar inferencias, obtener resultados o hacer deducciones, construir argumentos, obtener conclusiones, entre otras.

Subcategorías:

Procesos cognitivos abstractos

Consiste en una forma de pensamiento complejo, representa un avance que se define como un “salto cualitativo” a partir del pensamiento concreto u operatorio. Este pensamiento se caracteriza por la construcción de una serie de



razonamientos, mucho más elaborados que se apoyan en estructuras cerebrales, que empiezan a generarse en la adolescencia.

Pensamiento espacial y razonamiento visual

El pensamiento espacial se refiere al conjunto de procesos y habilidades visuales que permite al alumnado organizar y controlar información a partir de la manipulación de objetos concretos, con la finalidad de resolver un problema, a veces requiere transformar una representación externa en forma de representación interna esto se identifica como un razonamiento visual, surge como resultado de una compleja actividad mental analítico-sintética que destaca rasgos esenciales de lo que se está viendo y mantiene inhibidos otros que no lo son.

El razonamiento visual requiere combinar procesos: de análisis, en donde se parcializa al objeto en sus características, y de síntesis, mediante el cual se construye una nueva estructura que se compara con la percepción anterior.

Pensamiento aleatorio

El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, mediante exploración y la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos.

La segunda categoría es un importante recurso, dota de un conjunto de habilidades cognitivas complejas, con las cuales la persona se relaciona u obtiene información mediante las acciones antes mencionadas (intuir, observar,



comparar, asociar, analizar, sintetizar, deducir, inducir, generalizar, abstraer, modelar, simbolizar, cuestionar, dudar, elaborar conjeturas) éstas a su vez son detonadoras de otros recursos, útiles a las demás áreas, entre las cuales destacan: resolver, promover la justificación, argumentar, comprobar, validar, etc.

Categoría 3. Solución de problemas y modelación

Definida por dos procesos distintos, pero que comparten “el poner en juego ciertas estrategias”, ya sea para hacer una representación simplificada de un fenómeno a través de ecuaciones, funciones o fórmulas o bien para utilizar esta simplificación en la comprensión y resolución de problemas.

Subcategorías.

Uso de Modelos

Emplear una representación abstracta, conceptual, gráfica o simbólica de un fenómeno o de un proceso para analizar la relación entre sus variables lo que permite comprender fenómenos naturales, sociales, físicos y otros y además, resolver problemas.

Construcción de Modelos

Es un esquema extraído de situaciones problemáticas o de un fenómeno de un contexto específico basado en relaciones, patrones, para elaborar una expresión denominada modelo matemático, esto puede hacerse a partir de una representación gráfica o algebraica donde se describa la situación ya sea real o hipotética.

Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

La heurística se refiere a estrategias, métodos, criterios o astucias utilizados para hacer posible la solución de problemas complejos. Un procedimiento es *no*



rutinario cuando no basta con aplicar una regla o un método mecanizado o de carácter algorítmico o establecido, sino que requiere cierta intuición y búsqueda poniendo en práctica un conjunto de conocimientos y de experiencias anteriores.

La tercera categoría dota de recursos para solucionar problemas y plantear modelos, desde una perspectiva global, estos recursos son útiles para comprender el problema, diseñar y ejecutar un plan y probar el resultado. Con estos recursos se resuelven situaciones problemáticas con matemática, se ilustran con modelos realizados con el apoyo de aplicaciones digitales para el aprendizaje, se desarrollan procedimientos de solución tanto formales como intuitivos, estructurados y disruptivos y finalmente a través de detectar la posibilidad de llegar a resultados o la inviabilidad de éstos, se valora a la matemática en diferentes momentos del proceso.

Categoría 4. Interacción y lenguaje matemático

Entendida como un proceso social en el que se favorecen la negociación de significados, el consenso, el diálogo y el debate, además de las acciones asociadas con el desarrollo del pensamiento matemático, como la elaboración de conjeturas y argumentos o con la creatividad presente en diversas manifestaciones artísticas y culturales.

Tales interacciones deben llegar a expresar las ideas a través del lenguaje matemático para hablar de relaciones o para la construcción de ideas de objetos matemáticos, tales como: incógnita, ecuación, fórmula, etc. con el que se representan las situaciones problema donde, a diferencia del lenguaje natural, se tiene cierto rigor y formalismo.



Subcategorías

Registro escrito, simbólico, algébrico e iconográfico

Revisión de la forma en que se establecen jerarquías, agrupaciones, composiciones en proposiciones, uso formal de símbolos e imágenes respetando las propiedades y reglas.

Negociación de significados

Revisión colectiva de los significados de las expresiones, dar sentido e interpretar, así como la generación de expresiones y representaciones formales.

Ambiente matemático de comunicación.

Se describe así al ambiente generado por las formas expresivas y evocativas, el uso de figuras, tablas donde se considera lo aprendido y lo conocido en el pasado.

La cuarta categoría aporta al individuo recursos para emplear el lenguaje matemático y para interactuar con personas de su entorno dando una dimensión social al aprendizaje.

5.2. Transversalidad

Entendemos por transversalidad al enfoque de alta interacción entre áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos y recursos socioemocionales del MCCEMS. Estudios que poseen cierta relación con dicha concepción (Eronen, L., et al., 2019) nos hablan de un espectro que comprende lo multidisciplinario (diferentes disciplinas se integran alrededor de un tema común), lo interdisciplinario (la organización curricular alrededor de aprendizajes comunes a través de disciplinas) y la transdisciplinariedad (basada en interrogantes que las



y los estudiantes pueden hacerse y en sus inquietudes por desarrollar habilidades para la vida real dentro de contextos reales).

Al ser integrado como un recurso sociocognitivo al MCEMS, el pensamiento matemático adquiere una función transversal dentro de dicha estructura. Esto no implica que todo cuanto se trabaje con las y los estudiantes acerca del pensamiento matemático deba de transversalizarse, pues existirán momentos en que la disciplina demande trabajo sobre sí misma para poder continuar con un desarrollo integral.

El pensamiento matemático al posicionarse junto con los demás recursos sociocognitivos cumple una función de apoyo para que el estudiantado pueda consolidar sus conocimientos de las demás áreas. Son evidentes los puntos de encuentro entre el pensamiento matemático y las ciencias sociales (al estudiar fenómenos económicos o poblaciones, por poner un par de ejemplos), con las ciencias naturales, experimentales y tecnología (al hacer uso del lenguaje matemático para describir diversas leyes de la física o la química, al utilizar modelos matemáticos para ayudar en la explicación de algunos sistemas biológicos, etc.), con las humanidades (partiendo del hecho de que la propia matemática es obra creativa del ser humano y que muchas veces ha estado inmersa en diversos desarrollos artísticos).

Es importante decir que la transversalidad tanto con áreas de conocimientos como con recursos socioemocionales y sociocognitivos puede operar en dos niveles fundamentales: en un primer nivel a través de esos puntos de contacto existentes con las demás disciplinas a las que nos referíamos en el párrafo anterior; pero también en un segundo nivel, si se quiere más profundo, en donde la interiorización de las habilidades relacionadas con el pensamiento matemático permiten una mejor comprensión, una ordenación mental más clara y permiten también una mayor profundidad dentro de las demás experiencias cognitivas.



A pesar de la importante función que se le otorga al pensamiento matemático, no debemos olvidar que nosotras y nosotros, como docentes de pensamiento matemático, no tendremos necesariamente un lugar protagónico en la escuela. El trabajo colaborativo, tan esencial para el desarrollo del plan aula, escuela y comunidad, asume interacciones profesionales y respetuosas en la que todas y todos los agentes involucrados en la educación, entre los que nos encontramos nosotros y las y los colegas de otras áreas y recursos, valoren la función y las aportaciones de todos los demás.

Por último, es necesario que logremos enseñar con perspectiva socioemocional, pues enseñamos a seres humanos que merecen todo nuestro respeto y también debido a que logrando consolidar un ambiente de confianza mutua podremos desempeñar mejor nuestra importante labor.

5.3. Perfil de egreso: aprendizajes de trayectoria.

El perfil de egreso de la Educación Media Superior se define como la suma de los aprendizajes de trayectoria de cada uno de los recursos sociocognitivos, áreas de conocimiento y de los propósitos de la formación socioemocionales que conforman la estructura curricular del MCCEMS a través de las distintas Unidades Académicas Curriculares (UACS). Así, acorde con el Acuerdo Secretarial número 17/08/22, Sección IV Del perfil de egreso de la Educación Media Superior Artículo 40. “El perfil de egreso mínimo común de las y los estudiantes que acreditan estudios de EMS lo constituyen los Aprendizajes de trayectoria”.

Los aprendizajes de trayectoria de Pensamiento Matemático son:

- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y de algoritmos para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).
- Adapta procesos de razonamiento matemático que permiten relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las



ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).

- Modela y propone soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana) empleando lenguaje y técnicas matemáticas.
- Explica la solución de problemas en el contexto que le dio origen, empleando lenguaje matemático y lo valora como relevante y cercano a su vida.

Se ha buscado una visión de trayectoria, lo cual implica tener siempre presente dónde se encuentra el o la estudiante, de dónde viene y hacia dónde va, sin olvidar que las progresiones de aprendizaje cuentan con el suficiente espacio y flexibilidad para adecuarse a las distintas formas y tiempos en que el estudiantado aprende.

Se han establecido metas de aprendizaje por categoría, el logro de estas metas apoyará el desarrollo de los aprendizajes de trayectoria. Toda progresión busca favorecer el logro de algunas de estas metas. Al final de cada progresión se ha establecido la meta o las metas de aprendizaje que buscan favorecerse, sin que esto signifique necesariamente que sólo se estaría trabajando en la consecución de éstas.

A continuación, hacemos explícitos los aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje del Pensamiento Matemático clasificándolos por categorías.



PENSAMIENTO MATEMÁTICO			
Categoría			
Procedural	Procesos de Razonamiento	Solución de problemas y modelación	Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
Pensamiento aritmético	Procesos cognitivos abstractos	Uso de modelos	Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
Pensamiento algebraico	Pensamiento espacial y razonamiento visual	Construcción de Modelos	Negociación de significados
Elementos Geométricos	Pensamiento aleatorio	Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	Ambiente matemático de Comunicación
Manejo de Datos			
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y de algoritmos para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	Adapta procesos de razonamiento matemático que permiten relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).	Modela y propone soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana) empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica la solución de problemas en el contexto que le dio origen, empleando lenguaje matemático y lo valora como relevante y cercano a su vida.



Metas de Aprendizaje			
C1M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento.	C2M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno (natural o social) para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a explicarlo.	C3M1 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar el fenómeno estudiado en la solución de un problema.	C4M1 Esquematiza situaciones para su solución mediante el uso de datos numéricos, representación simbólica y conceptos matemáticos para dar un significado acorde con el contexto.
C1M2 Integra métodos de diferente naturaleza (aritmética, algebraica, geométrica o variacional) en la solución de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	C2M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar una hipótesis inicial ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	C3M2 Construye un modelo con lenguaje matemático y pone a prueba su utilidad para el estudio de un fenómeno (natural o social) o una situación problema.	C4M2 Elige la forma de comunicar a sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema para la socialización de los conocimientos.
C1M3 Comprueba los procedimientos usados en la	C2M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones	C3M3 Explica procedimientos para la solución de	C4M3 Organiza los procedimientos empleados en la



resolución de problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento, mediante la verificación directa o empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	categóricas o la posibilidad de ocurrencia de eventos para establecer similitudes y diferencias, organizándolos en formas lógicas o convenientes útiles en la solución de problemas.	problemas empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.
	C2M4 Combina diferentes procesos de razonamiento matemático al plantear un modelo o resolver un problema o una situación o fenómeno natural, experimental o social e interpreta el resultado, la predicción y/o la manera de reducir el nivel de riesgo.	C3M4 Formula problemas matemáticos, de su entorno o de otras áreas del conocimiento, a partir de cuestionamiento para resolverlos con estrategias, heurísticas, procedimientos informales o formales.	



VI. Progresiones de aprendizaje

"El investigador en matemáticas como en cualquier otra ciencia, no trabaja con un modelo deductivo riguroso. Por el contrario, esencialmente hace uso de su imaginación, y procede intuitivamente ayudado por métodos heurísticos [...] sin el descubrimiento no sería posible la conclusión."

Felix Klein

A continuación, presentaremos la propuesta de articulación a través de progresiones de aprendizaje para los primeros tres semestres de pensamiento matemático. Siguiendo la filosofía y presupuestos constructivistas de esta forma de organización (Simons, 1995), el desarrollo del pensamiento matemático descrito en estas páginas no es la presentación o deconstrucción lógica que se hace desde la disciplina, sino el que corresponde al desarrollo que pueden seguir las y los estudiantes durante su aprendizaje. No se descuida la fundamentación lógica, pero en materia educativa no podemos utilizar exclusivamente dicho criterio como eje articulador, en ese sentido hemos trazado un mapa del desarrollo constructivo que realizan las y los estudiantes atendiendo siempre la consistencia de la presentación matemática.

Los elementos de cada una de las progresiones han sido pensados para ser tratados en las aulas y escuelas durante aproximadamente una semana (4 horas de estudio en la escuela y 1 o 2 horas de estudio independiente en casa). Estos tiempos tan solo son sugeridos y dependerá del docente y de su grupo si se le presta mayor o menor tiempo a determinada etapa de la progresión (dentro de un rango razonable de tiempo) dependiendo del progreso mostrado por las y los estudiantes.

En cada etapa de la progresión se han establecido metas de aprendizaje clasificadas por categoría del pensamiento matemático, las cuales son sugerencias para guiar nuestra práctica docente y sirven como una ruta mínima



a seguir. No deben leerse como si se tratara de una camisa de fuerza, el o la docente pueden establecer, a través de diversas propuestas didácticas, metas de aprendizaje adicionales que contribuyan al desarrollo del pensamiento matemático. Se puede tomar como directriz que dentro del trabajo del aula se debe cuidar favorecer cada una de las categorías para lograr alcanzar mayores niveles de sofisticación del pensamiento matemático del estudiantado. Por lo demás, las metas de aprendizaje no son necesariamente alcanzadas con su tratamiento dentro de específicamente una de las etapas de las progresiones, sino que pueden ser frecuentadas a lo largo de éstas para con ello lograr alcanzar los aprendizajes de trayectoria planteados.

Se han colocado “*anotaciones didácticas*” en algunas progresiones como sugerencias que el y la docente pueden elegir seguir en su práctica, modificándolas si es necesario. En ocasiones se menciona como sugerencia mostrar algunos de los avances más recientes de la matemática en un nivel divulgativo, esto tiene una razón fundamental de ser: una de las creencias acerca de la matemática más arraigadas en la población en general es que ésta es un cuerpo de conocimiento acabado. Es probable que uno de los factores de desinterés de nuestras y nuestros estudiantes por esta ciencia se deba en parte a esta creencia, si mostramos a nuestros estudiantes el poder de la matemática de manera análoga a como se hace en materia de música cuando se les lleva a escuchar la grandeza de una obra musical, sin que se pida luego a las y los estudiantes tocar como el primer violín, es posible que rompamos con la creencia de que la matemática es un cuerpo de conocimientos que debe ser tratado de manera similar a como se hace la disección de un cadáver, y con ello es posible que incidamos en despertar el interés de nuestras y nuestros estudiantes por el pensamiento matemático, además de que a la par les estaríamos mostrando opciones de vida que aunque no necesariamente acojan para sí, son ventanas que se abren hacia otros caminos para su desarrollo humano y profesional.



En cada etapa de las progresiones se debe tener una visión global de los aprendizajes de trayectoria esperados del estudiando, para que desde etapas tempranas se prepare el terreno para el posterior trabajo de esos nuevos y más sofisticados objetos matemáticos. Por poner un ejemplo, en la primera unidad curricular de aprendizaje al estudiar correlación entre dos variables se espera que en el aula se introduzcan ideas y nociones que se retomarán en la segunda unidad curricular donde se revisaran funciones lineales para que además en el tercer semestre el estudiando llegue a entender un nivel de complejidad mayor de funciones reales de variable real. Ejemplos como este, en el que una sola idea se desarrolla a lo largo de los tres semestres hay muchos y es importante que el profesorado adquiera una visión global de las progresiones para poder dar un mejor acompañamiento a las y los estudiantes en este trayecto formativo.

Iniciamos el primer semestre trabajando con el pensamiento probabilístico y estadístico, arrancar con dicha elección tiene dos razones fundamentales: la primera es que nos sirve para, apelando a la experiencia de las y los alumnos, revisar, y en su caso reforzar, algunos aprendizajes de trayectoria como la estructura de los números reales, la ubicación de los números en la recta real, proporciones y porcentajes, entre muchos otros, de una manera contextualizada, de tal forma que la revisión de dichos conceptos puede resultar de mayor significación para el estudiantado a que si solo se hace de manera mecanicista. La segunda razón tiene que ver con los tiempos en los que estamos inmersos nosotros y nuestros estudiantes: la incertidumbre es una condición inseparable de nuestras vidas que en épocas volátiles como la nuestra se acentúa: poseer habilidades que tengan que ver con el manejo de datos, su organización, conciencia sobre la variabilidad y un cierto entendimiento del azar es indispensable para que las y los jóvenes puedan acceder a una mejor calidad de vida.



El segundo semestre corresponde al pensamiento aritmético, algebraico y geométrico. Se han colocado estos tres tipos de pensamiento en un mismo semestre pues resultan estar íntimamente ligados: el estudiantado históricamente ha sufrido dificultades para transitar de la aritmética al álgebra, esperamos que la articulación por progresiones haga que este tránsito sea más amable y llevadero. El álgebra está íntimamente relacionada con la aritmética y la geometría pues, como decía Sophie Germain: el álgebra no es más que geometría escrita y la geometría no es sino álgebra dibujada.

Una particularidad importante del segundo semestre es la revisión de un tema fundamental para el estudiantado: las matemáticas financieras. En esta primera aproximación se espera que las y los jóvenes adquieran conciencia financiera sobre sus ahorros, las deudas, las instituciones bancarias, los préstamos e hipotecas e incluso acerca de las afores, sin que ello quiera decir que comprendan completamente el funcionamiento de éstos. Consideramos que esta temática es una con la que toda y todo estudiante del bachillerato debiera estar familiarizado debido al enorme peso que tiene en el desarrollo de nuestras vidas.

La geometría se desarrolla en el segundo semestre desde la vertiente analítica y la vertiente sintética. Se construyen elementos mínimos de la geometría analítica como el uso del sistema coordenado cartesiano y algunas propiedades de rectas en el plano, posponiendo otros estudios interesantes para semestres subsecuentes. En el caso de la geometría sintética, se comienza con la conceptualización del cálculo de áreas y volúmenes, misma que será de utilidad para las y los estudiantes que en el futuro tengan algún acercamiento con temas de cálculo integral. Posteriormente se toma al teorema del triángulo de Napoleón como un problema-meta cuya cabal comprensión llevaría al estudiante a manejar los principales teoremas y resultados de la geometría euclidiana (Díaz Barriga, Alejandro, s. f.).



Por último, en el tercer semestre revisamos algunos elementos del pensamiento variacional, la presentación vuelve a ser heurística, siguiendo de cerca a Henri Poincaré:

“Cuando un estudiante comienza a estudiar seriamente matemáticas, cree saber qué es una fracción, qué es la continuidad y cuál es el área de una superficie curva; considera como evidente, por ejemplo, que una función continua no puede cambiar de signo sin anularse. Si se le dice, sin ninguna preparación: No, eso no es evidente, debes demostrarlo; y si la demostración se apoya en premisas que le parecen menos evidentes que las conclusiones, ¿qué pensará el infortunado estudiante? Pensará que la ciencia de las matemáticas es sólo una acumulación arbitraria de sutilezas inútiles; se aburrirá de las matemáticas o se divertirá con ellas como con un juego y llegará a un estado mental análogo al de los sofistas griegos.”

En ese sentido, no llegamos a desarrollar con total formalidad el estudio del cálculo diferencial, en particular no se plantea atender la definición épsilon-delta de límites. Tampoco se trabaja tal cual lo hicieron Leibniz y Newton en su época, a saber, a través de infinitesimales, sino que nos colocamos en un terreno intermedio en donde asumimos algunas propiedades de los límites de funciones reales de variable real para poder construir sobre dichas suposiciones nuevos conocimientos.

Introducir a nuestras y nuestros estudiantes al pensamiento variacional es fundamental pues a través de éste es que logramos comprender muchos fenómenos naturales, sociales e incluso médicos. La ciencia está mayoritariamente escrita en el lenguaje del cálculo y en este semestre las y los estudiantes tendrán un primer acercamiento a dicho lenguaje.

En la siguiente tabla se recapitulan los tipos de pensamiento que se estarán trabajando en cada una de las unidades de aprendizaje curricular.



Unidad de Aprendizaje Curricular	Tipo del pensamiento matemático
Pensamiento Matemático 1	Pensamiento estadístico y probabilístico
Pensamiento Matemático 2	Pensamiento aritmético, algebraico y geométrico.
Pensamiento Matemático 3	Pensamiento variacional.

6.1. Primer semestre – Pensamiento estadístico y probabilístico

6.1.1. Temática general

La incertidumbre es una condición inseparable del ser humano y la variabilidad inherente a diversos fenómenos de nuestra cotidianidad ha impulsado a la humanidad a idear formas de comprender de mejor manera el azar. Por otro lado, la época en la que vivimos se caracteriza por la abrumadora cantidad de información con la que tenemos contacto diariamente a través de diversos medios de comunicación. Ambas condiciones hacen indispensable que en el bachillerato busquemos formar seres humanos con habilidades de discernimiento y con una conciencia sobre los múltiples factores que nos arrojan a la incertidumbre para que puedan cuantificarla lo mejor posible, y así, les sea posible tomar decisiones más razonadas.

6.1.2. Aplicación disciplinar

El desarrollo disciplinar del pensamiento estadístico y probabilístico se da a través de la revisión de conceptos básicos de la probabilidad y la estadística: se comienza con la revisión de la variabilidad y cómo ésta hace necesario que busquemos cuantificar la incertidumbre.

Se llega a la definición de probabilidad teórica partiendo desde una perspectiva frecuencial. Para poder calcular la probabilidad de eventos aleatorios simples se vuelve necesario hacer una discusión sobre técnicas de conteo.

El concepto de probabilidad condicional es estudiado, con la posibilidad de llegar incluso a revisar el teorema de Bayes y sus aplicaciones en la actualidad.

Se estudia la recolección de datos y su organización, teniendo en cuenta la naturaleza de la o las variables estudiadas. Se analiza la correlación entre



variables cuantitativas aprovechando el momento para revisar algunas ideas sobre rectas en el plano.

Ideas básicas de la estadística descriptiva tales como medidas de tendencia central y medidas de dispersión son revisadas buscando que el estudiantado sepa leer e interpretar correctamente lo que éstas dicen acerca de un fenómeno estudiado.

Por último, se termina revisando algunas ideas acerca de distribuciones y de estadística inferencial como prueba de hipótesis.

6.1.3. Metas, categorías y progresiones

1. Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios que sean significativos para las y los estudiantes y en los que se valore la recolección y organización de datos (C2M1).

Anotaciones didácticas: Es importante que en este punto vayamos introduciendo algunas ideas referentes a la variabilidad, pues

“[...] El principio más fundamental en estadística es aquel de variabilidad. Si el mundo fuera perfectamente predecible y no mostrara variabilidad, no tendríamos necesidad de estudiar estadística.” (Rossman, A. Chance, L. 2011)

Se recomienda ir introduciendo a las y los alumnos a la idea de que una gran cantidad de fenómenos y situaciones de interés (el clima, el comportamiento de la bolsa de valores, etc.), por la gran cantidad de variables que intervienen en ellos, tienen un comportamiento caótico o impredecible y que es por ello que buscamos herramientas que nos ayuden cuantificar la incertidumbre.

Buscar que los ejemplos sean significativos para el estudiantado nos sugiere considerar situaciones que le sean cercanas. Mencionamos, sin pretender establecer que estos deban de ser los ejemplos a tratar, los siguientes: la reciente pandemia de COVID-19, indicadores de violencia en su comunidad, problemas relacionados con el agua (sequías o inundaciones, dependiendo de la región). Estos ejemplos nos permiten tener transversalidad con recursos socioemocionales y áreas del conocimiento como las ciencias sociales.



2. Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de la consulta de datos o simulaciones, considera la frecuencia con la que un evento puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda (C2M1, C2M2).

Anotaciones didácticas: Se busca que el estudiantado tenga una primera aproximación al pensamiento probabilístico desde una perspectiva frecuencial. Cuando se menciona el uso de simulaciones se deja abierta la posibilidad del uso de hojas de cálculo o software más sofisticado como R, aclarando que si no se cuenta con la infraestructura para llevarlo a cabo así, se pueden emplear materiales más asequibles como hojas comunes, fichas y el trabajo colaborativo en el grupo.

3. Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica (C1M1, C3M1, C4M1).

Anotaciones didácticas: Se sugiere continuar con el uso de tecnología cuando esto sea factible, además de acompañar la discusión de este tema desde una perspectiva histórica y humanista sobre los orígenes de la probabilidad.

Si el grupo lo requiere, es posible aprovechar este elemento de la progresión para revisar con las y los estudiantes aprendizajes de trayectoria relativos a la ubicación de los números reales en la recta, proporciones, porcentajes y fracciones, de tal forma que se revisan dichos conceptos dentro de un contexto que los vuelve significativos para el estudiantado.

Es importante hacer énfasis en la hipótesis de equiprobabilidad para el cálculo de probabilidades simples.

4. Elige una técnica de conteo (listados, diagramas de árbol, combinaciones, ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición, etc.) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones (C1M2, C1M3, C2M3)

Anotaciones didácticas: Es posible en este punto considerar ejemplos de la industria si es que esto es adecuado al contexto del estudiantado:



“En una industria automotriz se tiene el siguiente procedimiento de control de calidad: de un lote de 100 piezas manufacturadas, un inspector elige 10 de manera aleatoria y las analiza; si ninguna de dichas piezas es defectuosa, el inspector acepta el lote de 100 piezas. ¿Cuál es la probabilidad de que dentro del lote existan 10 piezas defectuosas y que éstas no sean detectadas por el inspector? ¿Cambiarías el control de calidad de la empresa?”

5. Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales. (C2M4)

Anotaciones didácticas: Es posible, si el grupo así lo permite, llegar incluso a tratar el teorema de Bayes. Se sugiere considerar las múltiples aplicaciones que dicho resultado tiene en la actualidad en campos como la inteligencia artificial, no con la finalidad de que la o el estudiante realicen los procedimientos y entiendan a profundidad dichas aplicaciones, sino como una forma de mostrar el poder de la matemática en diversos ámbitos del desarrollo humano.

Para introducir el estudio de probabilidad condicional se sugiere considerar la paradoja de Monty Hall y casos médicos de pruebas (de embarazo, para detectar cáncer, etc.) en los que se analice la posibilidad de tener falsos positivos y falsos negativos de tal forma que el tema pueda vincularse este estudio con recursos socioemocionales.

6. Selecciona una problemática o situación de interés, con la finalidad de recolectar información y datos de fuentes confiables e identifica las variables relevantes para su estudio. (C1M1, C4M2)

Anotaciones didácticas: Con este elemento de la progresión se busca que el estudiantado continúe con su entendimiento del concepto de variabilidad, en este momento se puede introducir la clasificación de variables según su naturaleza (cuantitativa, categórica, etc.) y hacer hincapié en que los instrumentos que se utilizan para analizar variables dependen de la naturaleza misma de éstas (por ejemplo, observar que calcular la media de una lista de números telefónicos no tiene sentido).

Es importante que trabajemos con nuestro grupo en la búsqueda de bases de datos confiables como el INEGI en el caso de nuestro país. Es posible



encontrar una conexión aquí para trabajar con las y los colegas del recurso Lengua y Comunicación.

7. Analiza datos categóricos y cuantitativos de alguna problemática o situación de interés para el estudiantado, a través de algunas de sus representaciones gráficas más sencillas como las gráficas de barras (variables cualitativas) o gráficos de puntos e histogramas (variables cuantitativas). (C2M2)

Anotaciones didácticas: Se sugiere utilizar este punto de la progresión para dar una primera introducción a conceptos que resultan de importancia en un estudio estadístico como lo son: tendencia estadística, tendencia central, dispersión. Esta introducción se sugiere que se haga de manera intuitiva y visual únicamente, pues se retomará el estudio de estos conceptos más adelante.

8. Analiza cómo se relacionan entre sí dos o más variables categóricas a través del estudio de alguna problemática o fenómeno de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si dichas variables son independientes. (C2M3)

Anotaciones didácticas: Se recomienda tomar ejemplos de casos de las ciencias médicas como el trabajo de Ignaz Semmelweis y John Snow, utilizando tablas de doble entrada.

Es posible aprovechar esta etapa de la progresión para estudiar el concepto de riesgo relativo en epidemiología y medicina.

9. Analiza dos o más variables cuantitativas a través del estudio de alguna problemática o fenómenos de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si existe correlación entre dichas variables. (C1M3, C2M4)

Anotaciones didácticas: Se recomienda que, si es posible, se use software libre para analizar el nivel de correlación entre dos variables cuantitativas. Si bien la determinación del coeficiente de Pearson requiere de herramientas estadísticas que se revisarán posteriormente en esta unidad curricular, es posible que en este momento se genere la intuición sobre dicho coeficiente.

Además se sugiere utilizar este elemento de la progresión para apuntalar ideas relativas con la graficación de funciones y recuperar y reforzar aprendizajes de trayectoria relativos a rectas en el plano.



10. Cuestiona afirmaciones estadísticas y gráficas, considerando valores atípicos (en el caso de variables cuantitativas) y la posibilidad de que existan factores o variables de confusión. (C4M2)

Anotaciones didácticas: Se sugiere revisar algunos ejemplos de la paradoja de Simpson.

11. Identifica, ante la imposibilidad de estudiar la totalidad de una población, la opción de extraer información de ésta a través del empleo de técnicas de muestreo, en particular, valora la importancia de la aleatoriedad al momento de tomar una muestra. (C3M3)

Anotaciones didácticas: Se sugiere revisar de manera intuitiva la variabilidad muestral, pues tener conciencia de ella es importante cuando se estudian temas de estadística inferencial.

12. Valora las ventajas y limitaciones de los estudios observacionales y los compara con el diseño de experimentos, a través de la revisión de algunos ejemplos tomados de diversas fuentes. (C4M1)

13. Describe un fenómeno, problemática o situación de interés para el estudiantado utilizando las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y de dispersión (desviación estándar, varianza, rango intercuartil, etc.) adecuadas al contexto y valora que tipo de conclusiones puede extraer a partir de dicha información. (C2M4, C3M3)

Anotaciones didácticas: Se sugiere el uso de recursos narrativos como la historieta o el relato breve para trabajar esta progresión.

Es recomendable que se exploren las limitaciones de las medidas de tendencia central cuando se pretende extraer inferencias a partir de ellas. También es importante que el estudiantado se capaz de interpretar lo que las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión indican del fenómeno estudiado.

14. Explica un evento aleatorio cuyo comportamiento puede describirse a través del estudio de la distribución normal y calcula la probabilidad de que dicho evento suceda. (C3M3, C4M3)

Anotaciones didácticas: Es importante cuidar la transición hacia el estudio de distribuciones pues es cualitativamente diferente determinar una probabilidad calculando el área bajo una curva.



Si se tienen la infraestructura se sugiere hacer uso de calculadoras y applets que calculan las áreas bajo la curva descrita por una distribución normal de manera automática, en caso contrario es posible hacer uso de tablas con las que igualmente se pueden calcular estas áreas si se revisa previamente el concepto de estandarización.

El estudio del área bajo una curva es importante y se retomará al finalizar el tercer semestre es recomendable preparar el terreno para ello desde este momento estimulando la intuición del estudiantado.

15. Valora la posibilidad de hacer inferencias a partir de la revisión de algunas propiedades de la distribución normal y del sentido de la estadística inferencial para considerar algunos fenómenos que pueden modelarse con dicha distribución. (C2M4, C3M4, C1M3)

Anotaciones didácticas: Se sugiere revisar en particular el concepto de prueba de hipótesis y contextualizar su uso en la actualidad.

6.2. Segundo semestre – Pensamiento aritmético, algebraico y geométrico

6.2.1. Temática general

El tránsito del estudiantado de la aritmética al álgebra suele ser complicado, la organización propuesta en estas líneas busca hacer que éste suceda de manera gradual, de tal forma que las y los estudiantes puedan observar las relaciones y generalizaciones entre ambas. Una de las directrices que se repiten a lo largo de estas progresiones es el entendimiento de que tanto en el álgebra como en la aritmética un motivo que guía nuestros estudios es la búsqueda de la expresión apropiada del objeto matemático para resolver nuestro problema. En ese sentido, se vuelve necesario buscar que nuestras y nuestros estudiantes posean claridad en la manipulación algebraica.

Se busca también que, a través del estudio de propiedades aritméticas de los números enteros y reales, y de propiedades geométricas de diversos objetos matemáticos, el estudiantado trabaje en sus habilidades de observación, sus habilidades para conjeturar y argumentar, para lograr así obtener una intuición educada además de capacidades discursivas que resultan fundamentales en diversos rubros profesionales y de la vida personal. Estudiamos dichas



propiedades aritméticas y geométricas a través de mosaicos deductivos, en los cuales se asumen algunos resultados para poder continuar con el desarrollo deductivo, con la condición de que éstos puedan ser revisados con mayor detenimiento en una etapa posterior de aprendizaje.

6.2.2. Aplicación disciplinar

Para trabajar con el estudiantado en el desarrollo de las habilidades del pensamiento matemático se han elegido revisar algunos elementos disciplinares de la aritmética como la divisibilidad (propiedades y algunos criterios), máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Se hace una revisión de la estructura de los números reales emulando su desarrollo histórico: se propone comenzar con algunas propiedades de los números decimales positivos e ir construyendo a través de observaciones a partir de ellos al conjunto de los números reales, de tal forma que solo después de que el estudiantado haya trabajado directamente con dicho objeto matemático podamos presentarlo de manera axiomática considerándolo como un campo ordenado completo.

Se trabaja el lenguaje algebraico a partir de objetos matemáticos con los que el estudiante haya tenido ya un acercamiento previo como los números enteros o los números reales.

Algunos elementos de la matemática financiera son estudiados dada la gran relevancia que tiene el lograr una cierta conciencia financiera para alcanzar una mejor calidad de vida.

Estudiamos sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas centrándonos no tanto en técnicas para resolverlos sino en su contraparte e interpretación geométrica. Llegamos a aplicar algunos de estos conocimientos en el estudio de problemas de optimización donde se emplea el teorema fundamental de la programación lineal.

Se estudian cuadrados pitagóricos y al triángulo de Napoleón considerando que la cabal comprensión de éstos implica en el estudiante una comprensión de los elementos básicos de la geometría euclidiana (Díaz Barriga Alejandro, s.f.).



6.2.3. Metas, categorías y progresiones

1. Compara, considerando sus aprendizajes de trayectoria, el lenguaje natural con el lenguaje matemático para observar que este último requiere de precisión y rigurosidad. (C4M1)

Anotaciones didácticas: en la vida cotidiana encontramos expresiones como “¡Oferta: 3×2 en todas las playeras!”, en el lenguaje utilizado en el enunciado de estas ofertas no tiene el mismo sentido que el que le damos en el contexto matemático, obsérvese por ejemplo que no tiene sentido hablar de la conmutatividad, ni de la cerradura de la operación.

Es importante diferenciar el sujeto a quien nos referimos en nuestros enunciados: cuando decimos “María es una chica muy inteligente” y cuando decimos “María tiene 5 letras”, aunque parece que hablamos del mismo sujeto, realmente nos referimos a dos entidades distintas; tener claridad en esto es importante para el desarrollo del pensamiento algebraico.

2. Revisa algunos elementos de la sintaxis del lenguaje algebraico considerando que en el álgebra buscamos la expresión adecuada al problema que se pretende resolver (utilizamos la expresión simplificada, la expresión desarrollada de un número, la expresión factorizada, productos notables, según nos convenga). (C1M1, C4M2)

Anotaciones didácticas: Para dar más sentido a la introducción del lenguaje algebraico —fundamental para lograr un pensamiento algebraico— se sugiere mostrar que el quehacer algebraico consiste muchas veces en la búsqueda de la expresión adecuada al problema: Si un mecánico solicita una llave de $\frac{1}{2}$ y su ayudante le pasa dos llaves de $\frac{1}{4}$, a pesar de que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ no podemos decir que el ayudante cumpliera satisfactoriamente la consigna; de igual manera, si le pedimos a un estudiante que nos diga cuánto es la suma de los números tres y dos y él nos responde $3 + 2$ o $\sqrt{25}$, aunque no teníamos en mente dicha respuesta el o la estudiante estaría respondiendo algo cierto: lo que debimos solicitarle fue la expresión simplificada de la suma de los números tres y dos. En resumen, hay que tener cuidado con el lenguaje al solicitar una tarea.

Un problema para trabajar sintaxis algebraica y el uso del sistema decimal es el siguiente: hay un mago que descubre el mes y el día del nacimiento



de cualquier persona, lo único que tienes que hacer es decirle el resultado de las siguientes operaciones: el número del mes en el que naciste lo multiplicas por 2, se le suma 22, al resultado lo multiplicas por 5, después se le resta 8 y al resultado se multiplica por 10, al resultado se le suma 14, después se le suma el día en que naciste y por último al resultado se suma 31. (El mago restando a dicha cantidad 1065 puede adivinar el día y el mes en que naciste) ¿Cómo hace el mago para descubrirlo?

Muchos de los elementos procedurales de esta progresión pueden dejarse para estudio en casa.

3. Examina situaciones que puedan modelarse utilizando lenguaje algebraico y resuelve problemas en los que se requiere hacer una transliteración entre expresiones del lenguaje natural y expresiones del lenguaje simbólico del algebra. (C1M3, C4M3)

Anotaciones didácticas: se sugiere emplear problemas como el siguiente, el cual fue tomado del libro “Álgebra recreativa” de Yakov Perelman: “Un caballo y un mulo caminan juntos, el caballo se queja de su carga, el mulo le dice *¿de qué te quejas? Si yo tomara un saco de la tuya mi carga sería el doble de la tuya. En cambio, si te doy uno de mis sacos, tu carga se iguala a la mía, así que no tienes por qué quejarte pues yo llevo más sacos que tú.* ¿Cuántos sacos lleva el caballo? ¿Cuántos sacos lleva el mulo?”

Con este tipo de problemas se busca que el estudiantado domine con mayor sofisticación el uso del lenguaje algebraico.

4. Explica algunas relaciones entre números enteros utilizando conceptos como el de divisibilidad, el de número primo o propiedades generales sobre este conjunto numérico, apoyándose del uso adecuado del lenguaje algebraico. (C2M2, C4M2)

Anotaciones didácticas: Decimos que un entero divide a otro, si existe una expresión del segundo como el primero multiplicado por algún entero. Obsérvese que una teoría de divisibilidad se trivializa si se trabaja con la totalidad de los números reales, pues cualquier número distinto de cero dividiría a cualquier otro.

Se sugiere trabajar con pruebas de divisibilidad, revisar cómo dichas pruebas se utilizan en los algoritmos de detección de errores que emplean los sistemas como el ISBN, la seriación de fármacos, en la lectura de dígitos de tarjetas de crédito, etc.



Es recomendable analizar algunas propiedades interesantes del conjunto de números primos como que dicho conjunto es infinito. Se recomienda discutir con las y los estudiantes algunas de las aplicaciones más recientes de la aritmética, por ejemplo, la criptografía, no con la intención de que se comprenda en su totalidad el tema, sino que sirva al estudiantado para observar el poder de la matemática y que es una ciencia que continúa desarrollándose.

5. Conceptualiza el máximo común divisor (M.C.D.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números enteros y los aplica en la resolución de problemas. (C1M3, C2M1)
6. Revisa desde una perspectiva histórica al conjunto de los números reales, comenzando con la consideración de números decimales positivos hasta llegar a la presentación de la estructura de campo ordenado de los números reales. (C1M3, C2M1)

Anotaciones didácticas: En este punto las y los estudiantes cuentan con los aprendizajes de trayectoria obtenidos del trabajo que se hizo con este conjunto numérico en el razonamiento estadístico y probabilístico. Para que este estudio sea significativo.

Es importante ir construyendo las propiedades de los reales sobre conocimientos previos, comenzando con números decimales positivos e ir construyendo sobre ellos hasta llegar a la presentación axiomática de los reales como un campo ordenado completo.

Es recomendable emplear retos para introducir algunas propiedades interesantes de este conjunto numérico.

7. Resuelve situaciones-problema significativas para el estudiantado que involucren el estudio de proporcionalidad tanto directa como inversa, así como también el estudio de porcentajes, empleando la estructura algebraica de los números reales. (C2M3)
8. Discute la conformación de un proyecto de vida considerando elementos básicos de la matemática financiera tales como interés simple y compuesto, ahorros y deudas a través de la aplicación de la estructura algebraica de los números reales y con la finalidad de promover la toma de decisiones más razonadas. (C4M1, C3M3)



Anotaciones didácticas: se sugiere discutir con las y los estudiantes sus proyectos de vida, en un ambiente de respeto y cuidado de la componente socioemocional, para que con base en ello se introduzca la necesidad de una planeación financiera.

9. Conceptualiza el área de una superficie y deduce fórmulas para calcular áreas de figuras geométricas simples como rectángulos, triángulos, trapecios, etc., utilizando principios y propiedades básicas de geometría sintética. (C2M1)

Anotaciones didácticas: cuando se considera el concepto de área de una superficie partiendo de la idea de cubrirla con cuadrados cuyos lados tengan longitud unitaria es importante cuidar que al cubrir la superficie dichos cuadrados no se traslapen y que no existan zonas de la superficie sin cubrir por los cuadrados. Estas ideas pueden resultar útiles al estudiantado si en el futuro deciden estudiar temas relativos al cálculo integral.

10. Revisa el teorema del triángulo de Napoleón, considerándolo como un problema-meta en el que se aplican resultados de la geometría euclidiana como: Teorema de Pitágoras, criterios de congruencia y semejanza de triángulos, caracterizaciones de cuadriláteros concíclicos, entre otros. (C2M4, C4M2, C4M3)

Anotaciones didácticas: Se recomienda tener especial cuidado en la estructura de los enunciados, buscar apoyado por algún software libre como GeoGebra que él o la estudiante conjeture de tal manera que identifique las hipótesis de los teoremas y sus conclusiones, preguntarse por la veracidad de los recíprocos, por ejemplo, del teorema de Pitágoras.

Con este estudio es posible presentar un mosaico deductivo, es decir, trabajar localmente en geometría euclidiana. Se pretende guiar al estudiante para que pueda conjeturar y hacer deducciones locales argumentando a favor de teoremas, no a partir de los axiomas de la geometría, sino de hechos que se suponen ciertos y que el estudiante conoce o se pide que sean creídos a condición de que en un momento posterior se prueben a partir de hechos que sí conozca. (Díaz Barriga, Alejandro, s.f.).

11. Emplea un sistema de coordenadas y algunos elementos básicos de geometría analítica como la distancia entre dos puntos en el plano para calcular áreas de figuras geométricas básicas y compara estos resultados



con los cálculos obtenidos empleando principios básicos de geometría sintética. (C3M1)

Anotaciones didácticas: Las y los estudiantes poseen aprendizajes de trayectoria del razonamiento estadístico y probabilístico referentes a sistemas de coordenadas y rectas en el plano cartesiano, es muy recomendable que en este punto de la progresión se refuercen dichos aprendizajes de trayectoria sobre todo los referentes al estudio de rectas en el plano pues serán fundamentales para los estudios posteriores.

12. Modela situaciones y resuelve problemas significativos para el estudiantado tanto de manera algebraica como geométrica al aplicar propiedades básicas de funciones lineales, cuadráticas y polinomiales. (C3M2)

Anotaciones didácticas: Con este elemento de la progresión se prepara el camino para que la y el estudiante adquieran familiaridad con el concepto de función que será central dentro del pensamiento variacional, se debe tener en cuenta los aprendizajes de trayectoria que se proyecta que los estudiantes adquieran de tal forma que se apuntalen desde este momento, sobre todo considerando los requerimientos del pensamiento variacional con respecto a funciones.

13. Resuelve problemáticas provenientes de las áreas del conocimiento que involucren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y considera una interpretación geométrica de estos sistemas. (C3M3)

Anotaciones didácticas: Se sugiere no dar un especial énfasis a los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales sino procurar una comprensión conceptual de dichos objetos matemáticos, teniendo en cuenta la interpretación geométrica de los mismos y considerando los efectos que las operaciones elementales tienen sobre los objetos geométricos asociados al sistema de ecuaciones lineales.

Es posible motivar el estudio de sistemas de ecuaciones lineales al estudiar problemáticas de las ciencias naturales, experimentales y tecnología como lo es el estudio de las reacciones químicas.

14. Modela situaciones y resuelve problemas en los que se busca optimizar valores aplicando el teorema fundamental de la programación lineal y combinando elementos del lenguaje algebraico que conciernen al estudio de desigualdades y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (C2M4, C3M3, C4M3)



Anotación didáctica: Con este elemento de la progresión no se pretende que el o la estudiante demuestre el teorema antes citado, pues dicha demostración sale del alcance del curso, aunque es fácil intuir la demostración del teorema en el plano y con esto profundizar el concepto de rectas paralelas y de pendiente de una recta. Se pide aplicar el teorema en la resolución de problemas del siguiente tipo:

“Cindy requiere juntar algo de dinero para un viaje, como ella sabe repostería decide elaborar y vender pastelillos de chocolate y de vainilla con fruta. Para hacer una docena de pastelillos de chocolate necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla y para hacer una docena de pastelillos de vainilla con fruta necesita 6 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para elaborar pastelillos solamente cuenta con 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27.5 kg de mantequilla. Su idea es vender a \$200 cada docena de pastelillos de chocolate y vender a \$300 cada docena de pastelillos de vainilla con frutos. Con esos datos, ¿cuántas docenas de cada tipo de pastelillo debe elaborar para obtener la ganancia máxima?”

6.3. Tercer semestre – Pensamiento variacional

6.3.1. Temática general

El pensamiento variacional es un componente indispensable para las ciencias y la tecnología, sin la herramienta teórica suministrada por el cálculo para representar y modelar situaciones y fenómenos el nivel de comprensión que tiene la humanidad sobre la realidad sería deficiente.

No solamente es la realidad física la que puede explicarse a través del pensamiento variacional, también la comprensión de algunos sistemas biológicos, fenómenos epidemiológicos y sociales pueden ser explicados con la ayuda del pensamiento variacional.

Para comprender nuestra realidad es necesario tener conciencia sobre lo que varía. El cambio es una parte constitutiva de la vida, es por ello por lo que el estudio de la variación desde el pensamiento matemático se vuelve fundamental en la formación humana de nuestras y nuestros jóvenes.



6.3.2. Aplicación disciplinar

Para favorecer en el estudiantado el desarrollo de habilidades relacionadas con el pensamiento variacional se han elegido algunos elementos disciplinares del cálculo que a continuación enumeraremos.

No divorciamos a la matemática de su componente humanista, partimos de revisar algunos de los estudios más relevantes sobre cambio y movimiento que han tenido lugar, desde la antigüedad, en el pensamiento de algunos filósofos y como éstos fueron evolucionando hasta llegar a la concepción matematizada de la realidad de Galileo y la invención del cálculo por Leibniz y Newton. Se estudia también cómo algunas de estas ideas estuvieron presentes en la humanidad mucho antes de cristalizarse y formalizarse.

La perspectiva que adoptamos es la de un punto medio entre la intuición original de los infinitesimales y el desarrollo formal de la disciplina: asumimos algunas leyes sobre límites de funciones reales de variable real y sobre ellas construimos nuevos conocimientos. Es notable el tiempo que le costó a la humanidad lograr formalizar satisfactoriamente estas ideas, es por ello que nos colocamos en un punto intermedio entre la intuición y la formalidad.

Se revisa el concepto de continuidad y diferenciabilidad y la relación entre ellos (toda función derivable es continua, pero no toda función continua es derivable), se busca que el estudiantado genere intuiciones acerca de las implicaciones de la continuidad y diferenciabilidad.

Se utilizan algunas propiedades de la derivada para estudiar gráficas de funciones y determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de funciones, la concavidad o convexidad de gráficas, su puntos máximos o mínimos relativos, etc.

Analizamos problemas de optimización empleando técnicas del cálculo diferencial y abordamos la modelación de fenómenos a través del uso de funciones reales de variable real. Se espera que el estudiantado, al finalizar esta unidad curricular de aprendizaje, sea capaz de proponer un modelo sencillo para explicar algún fenómeno, aunque no se espera que la ecuación diferencial que lo describe pueda ser resuelta, pues no se tratan en este semestre las técnicas necesarias para hacerlo sino que se posponen para un curso más avanzado.

Se concluye el curso con una revisión somera del teorema fundamental del cálculo y la relación que tiene éste con el estudio emprendido en la primera unidad curricular cuando se revisaban áreas debajo de una curva.



6.3.3. Metas, categorías y progresiones

1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. (C2M1)

Anotaciones didácticas: las ideas centrales del cálculo estuvieron latentes en la humanidad desde la antigüedad, se sugiere presentar alguno de estos desarrollos con el lenguaje actual, pero sin pretender formalizar los conceptos en esta primera introducción.

Es posible revisar el ejemplo de Arquímedes sobre la aproximación del área de una circunferencia utilizando polígonos regulares inscritos (en este caso se estaría haciendo uso de funciones trigonométricas para lo cual se apela a los aprendizajes de trayectoria que el estudiantado posee, dicho tema se revisará posteriormente). Otra posibilidad es estudiar algunas de las paradojas de Zenón desde el punto de vista matemático y aprovechar para trabajar transversalmente con Humanidades.

2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. (C4M1, C3M1)

Anotaciones didácticas: en este punto de la progresión no se pretende resolver dichos problemas, pues será necesario hacer una revisión más profunda del concepto de derivada, cosa que se hará posteriormente. Se busca que el estudiantado tenga un acercamiento intuitivo y heurístico a los problemas que dieron origen al cálculo. De ser necesario, se puede aprovechar este momento para hacer una revisión de aprendizajes de trayectoria relativos a la geometría sintética y de los elementos básicos de geometría analítica tratados en la segunda unidad de aprendizaje de pensamiento matemático.

3. Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas. (C3M2)



Anotaciones didácticas: se sugiere buscar situaciones y fenómenos interesantes para el estudiantado, las actividades deportivas pueden ser un buen ejemplo.

Es posible revisar el estudio que hace Galileo sobre los cuerpos en caída libre, es recomendable hacer uso de software libre como Tracker y GeoGebra para introducir el estudio de funciones reales de variable real en la modelación.

Una recomendación importante es que se busque contextualizar en la modelación a las operaciones básicas de funciones (suma, resta, multiplicación, composición, etc.)

4. Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático. (C2M1)

Anotaciones didácticas: posteriormente en esta unidad de aprendizaje, cuando se cuente con la herramienta suficiente del cálculo, podrán revisarse técnicas y procedimientos para describirlos a través de la derivada. En este punto se espera únicamente un tratamiento intuitivo y conceptual.

5. Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función. (C4M1, C1M1)

Anotaciones didácticas: No se pretende que el estudiantado trabaje de manera rigurosa y formal el concepto de límite (definición ϵ -delta), sino más bien que, asumiendo algunas "leyes de los límites" pueda utilizar dicho concepto.

Si el grupo lo permite, es posible hacer una revisión breve de límites infinitos.

6. Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación. (C4M2)



Anotaciones didácticas: se da seguimiento al trabajo hecho en el punto 4. donde se revisa el concepto de continuidad de una función, pero en este momento se formaliza a través de la herramienta estudiada en 5.

Es posible, si las condiciones del grupo lo permiten, revisar en este punto de manera intuitiva el teorema fundamental del valor intermedio y concluir que toda función polinomial de grado impar tiene, por fuerza, al menos una raíz real.

7. Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, “la derivada”, de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales. (C1M2, C2M1)

Anotaciones didácticas: Entre las nociones de derivada que buscan integrarse están: la derivada como la pendiente de la recta tangente de una curva en un punto; la derivada como razón de cambio, en particular la derivada como velocidad instantánea.

8. Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos. (C1M3, C2M3)

Anotaciones didácticas: Es importante procurar no volver este curso un curso únicamente procedural, por ello se sugiere concentrarse en la búsqueda heurística de dichas reglas más que en su aplicación mecanicista.

Dando continuidad a la progresión 3., es recomendable utilizar este punto de la progresión para seguir revisando operaciones con funciones, incluso utilizando funciones trigonométricas y exponenciales, en el entendido que el estudio formal se llevará a cabo posteriormente (i.e. dar primeros vistazos a funciones especiales).

Si el o la docente no encuentra las condiciones para la búsqueda heurística de algunas de las reglas de derivación antes citadas, se sugiere asumirlas para aplicarlas posteriormente en problemas significativos para el estudiantado que tengan que ver con modelación.

9. Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea. (C3M2)



Anotaciones didácticas: pueden, por ejemplo, revisarse la ley de enfriamiento de Newton (no se busca que se resuelva una ecuación diferencial, pero se puede hablar brevemente sobre su planteamiento), el estudio del llenado y/o vaciado de recipientes, entre otros.

10. Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica. (C1M3, C2M4)

Anotaciones didácticas: de ser posible es recomendable el uso de software libre como GeoGebra para este punto de la progresión con la finalidad de ver a la derivada de una función como una función y con ello extraer información de la función original a partir de la gráfica de su derivada.

11. Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate. (C3M3, C4M2)

Anotaciones didácticas: Se sugiere revisar temas de economía matemática como costos, ingresos, ganancias, costos marginales, entre otros. Si se elige explorar este tema es importante hacer un comentario sobre cómo se están empleando funciones de variable continua para modelar objetos discretos.

En este punto de la progresión es posible analizar el problema de encontrar la caja de volumen máximo a partir de una lámina rectangular al que se le hacen unos cortes en las esquinas para luego levantar las paredes de la caja, como recomendación podemos decir que es importante aprovechar la oportunidad para que nuestras y nuestros estudiantes desarrollen habilidades que les permitan modelar fenómenos, en ese sentido no podemos comenzar nosotros como docentes nombrando con "x" a la longitud del doblez de la caja, pues parte del proceso de modelación es llevar a las y los estudiantes a que encuentren cuál debe ser la variable adecuada para modelar el fenómeno.

12. Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí. (C3M2)



13. Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas. (C3M2)
14. Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables. (C3M4 C2M4, C4M3)

Anotación didáctica: es importante resaltar que en este punto no se pretende que el estudiantado sea capaz de resolver una ecuación diferencial, pero se sugiere trabajar un poco en que el estudiantado sea capaz de plantear alguna ecuación diferencial como aquella que describe el decaimiento radiactivo, el modelo presa-depredador, el crecimiento bacteriano, entre otros. Hacemos un énfasis en que el estudiantado, en este punto, no cuenta con la herramienta suficiente para ser capaz de resolver ecuaciones diferenciales, se pretende únicamente dar un acercamiento.

Se sugiere emplear herramientas didácticas como la historieta o el relato para analizar algunos de estos modelos y buscar conexiones con Lengua y Comunicación, Humanidades y otras áreas o recursos del Marco Curricular Común.

En este punto es posible dar un acercamiento al estudiantado a la revisión de cómo técnicas del cálculo fueron empleadas en la modelación de la pandemia de COVID-19, no se pretende que se comprendan los detalles, sino compartirlos en un formato de plática para motivar al estudiantado a continuar con estos estudios.

También es sumamente importante llevar a nuestras y nuestros estudiantes a observar cómo en diversos fenómenos complejos intervienen una gran cantidad de variables, lo cual hace imposible que podamos predecir con exactitud el comportamiento de dicho fenómeno. Como ejemplo podemos abordar los estudios de Eduard Lorenz, James A. York y Benoît Mandelbrot, sobre el caos y la fractalidad a un nivel divulgativo, retomando ideas vistas en Pensamiento Matemático I sobre la incertidumbre.

15. Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo. (C2M4)



Anotaciones didácticas: la discusión que se propone hacer en el aula en este punto es de carácter intuitivo. Se sugiere relacionar este punto de la progresión con el estudio hecho en la primera unidad curricular de pensamiento matemático en donde se estudiaba la distribución normal y la probabilidad como el área bajo una curva.



VII. Anexo

A continuación, compartimos una tabla integradora donde aparecen las categorías y subcategorías del pensamiento matemático, así como los aprendizajes de trayectoria, metas de aprendizaje y las progresiones de aprendizaje de los primeros tres semestres de Pensamiento Matemático.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO			
Categoría			
Procedural	Procesos de Razonamiento	Solución de problemas y modelación	Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
Pensamiento aritmético	Procesos cognitivos abstractos	Uso de modelos	Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
Pensamiento algebraico	Pensamiento espacial y razonamiento visual	Construcción de Modelos	Negociación de significados
Elementos Geométricos	Pensamiento aleatorio	Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	Ambiente matemático de Comunicación
Manejo de Datos			
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y de algoritmos para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias	Adapta procesos de razonamiento matemático que permiten relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de	Modela y propone soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales,	Explica la solución de problemas en el contexto que le dio origen, empleando lenguaje matemático y lo valora como



naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).	humanidades y de la vida cotidiana) empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	relevante y cercano a su vida.
Metas de Aprendizaje			
C1M1	C2M1	C3M1	C4M1
Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento.	Observa y obtiene información de una situación o fenómeno (natural o social) para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a explicarlo.	Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar el fenómeno estudiado en la solución de un problema.	Esquematiza situaciones para su solución mediante el uso de datos numéricos, representación simbólica y conceptos matemáticos para dar un significado acorde con el contexto.
C1M2	C2M2	C3M2	C4M2
Integra métodos de diferente naturaleza (aritmética, algebraica, geométrica o variacional) en la solución de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales,	Desarrolla la percepción y la intuición para generar una hipótesis inicial ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	Construye un modelo con lenguaje matemático y pone a prueba su utilidad para el estudio de un fenómeno (natural o social) o una situación problema.	Elige la forma de comunicar a sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema para la socialización de los conocimientos.



humanidades y de la vida cotidiana).			
C1M3 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento, mediante la verificación directa o empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	C2M3 Compara hechos, opiniones o afirmaciones categóricas o la posibilidad de ocurrencia de eventos para establecer similitudes y diferencias, organizándolos en formas lógicas o convenientes útiles en la solución de problemas.	C3M3 Explica procedimientos para la solución de problemas empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	C4M3 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.
	C2M4 Combina diferentes procesos de razonamiento matemático al plantear un modelo o resolver un problema o una situación o fenómeno natural, experimental o social e interpreta el resultado, la predicción y/o la manera de reducir el nivel de riesgo.	C3M4 Formula problemas matemáticos, de su entorno o de otras áreas del conocimiento, a partir de cuestionamiento para resolverlos con estrategias, heurísticas, procedimientos informales o formales.	
Progresiones de aprendizaje de Pensamiento Matemático I			



1. Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios que sean significativos para las y los estudiantes y en los que se valore la recolección y organización de datos (C2M1).
2. Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de la consulta de datos o simulaciones, considera la frecuencia con la que un evento puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda (C2M1, C2M2).
3. Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica (C1M1, C3M1, C4M1).
4. Elige una técnica de conteo (listados, diagramas de árbol, combinaciones, ordenaciones con repetición, ordenaciones sin repetición, etc.) para calcular el número total de casos posibles y casos favorables para eventos simples con la finalidad de hallar su probabilidad y con ello generar una mayor conciencia en la toma de decisiones (C1M2, C1M3, C2M3)
5. Observa cómo la probabilidad de un evento puede actualizarse cuando se obtiene más información al respecto y considera eventos excluyentes e independientes para emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales. (C2M4)
6. Selecciona una problemática o situación de interés, con la finalidad de recolectar información y datos de fuentes confiables e identifica las variables relevantes para su estudio. (C1M1, C4M2)
7. Analiza datos categóricos y cuantitativos de alguna problemática o situación de interés para el estudiantado, a través de algunas de sus representaciones gráficas más sencillas como las gráficas de barras (variables cualitativas) o gráficos de puntos e histogramas (variables cuantitativas). (C2M2)
8. Analiza cómo se relacionan entre sí dos o más variables categóricas a través del estudio de alguna problemática o fenómeno de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si dichas variables son independientes. (C2M3)
9. Analiza dos o más variables cuantitativas a través del estudio de alguna problemática o fenómenos de interés para el estudiantado, con la finalidad de identificar si existe correlación entre dichas variables. (C1M3, C2M4)
10. Cuestiona afirmaciones estadísticas y gráficas, considerando valores atípicos (en el caso de variables cuantitativas) y la posibilidad de que existan factores o variables de confusión. (C4M2)
11. Identifica, ante la imposibilidad de estudiar la totalidad de una población, la opción de extraer información de ésta a través del empleo de técnicas de



- muestreo, en particular, valora la importancia de la aleatoriedad al momento de tomar una muestra. (C3M3)
12. Valora las ventajas y limitaciones de los estudios observacionales y los compara con el diseño de experimentos, a través de la revisión de algunos ejemplos tomados de diversas fuentes. (C4M1)
 13. Describe un fenómeno, problemática o situación de interés para el estudiantado utilizando las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y de dispersión (desviación estándar, varianza, rango intercuartil, etc.) adecuadas al contexto y valora que tipo de conclusiones puede extraer a partir de dicha información. (C2M4, C3M3)
 14. Explica un evento aleatorio cuyo comportamiento puede describirse a través del estudio de la distribución normal y calcula la probabilidad de que dicho evento suceda. (C3M3, C4M3)
 15. Valora la posibilidad de hacer inferencias a partir de la revisión de algunas propiedades de la distribución normal y del sentido de la estadística inferencial para considerar algunos fenómenos que pueden modelarse con dicha distribución. (C2M4, C3M4, C1M3)

Progresiones de aprendizaje de Pensamiento Matemático II

1. Compara, considerando sus aprendizajes de trayectoria, el lenguaje natural con el lenguaje matemático para observar que este último requiere de precisión y rigurosidad. (C4M1)
2. Revisa algunos elementos de la sintaxis del lenguaje algebraico considerando que en el álgebra buscamos la expresión adecuada al problema que se pretende resolver (utilizamos la expresión simplificada, la expresión desarrollada de un número, la expresión factorizada, productos notables, según nos convenga). (C1M1, C4M2)
3. Examina situaciones que puedan modelarse utilizando lenguaje algebraico y resuelve problemas en los que se requiere hacer una transliteración entre expresiones del lenguaje natural y expresiones del lenguaje simbólico del álgebra. (C1M3, C4M3)
4. Explica algunas relaciones entre números enteros utilizando conceptos como el de divisibilidad, el de número primo o propiedades generales sobre este conjunto numérico, apoyándose del uso adecuado del lenguaje algebraico. (C2M2, C4M2)
5. Conceptualiza el máximo común divisor (M.C.D.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números enteros y los aplica en la resolución de problemas. (C1M3, C2M1)
6. Revisa desde una perspectiva histórica al conjunto de los números reales, comenzando con la consideración de números decimales positivos hasta



- llegar a la presentación de la estructura de campo ordenado de los números reales. (C1M3, C2M1)
- 7 Resuelve situaciones-problema significativas para el estudiantado que involucren el estudio de proporcionalidad tanto directa como inversa, así como también el estudio de porcentajes, empleando la estructura algebraica de los números reales. (C2M3)
 - 8 Discute la conformación de un proyecto de vida considerando elementos básicos de la matemática financiera tales como interés simple y compuesto, ahorros y deudas a través de la aplicación de la estructura algebraica de los números reales y con la finalidad de promover la toma de decisiones más razonadas. (C4M1, C3M3)
 - 9 Conceptualiza el área de una superficie y deduce fórmulas para calcular áreas de figuras geométricas simples como rectángulos, triángulos, trapecios, etc., utilizando principios y propiedades básicas de geometría sintética. (C2M1).
 - 10 Revisa el teorema del triángulo de Napoleón, considerándolo como un problema-meta en el que se aplican resultados de la geometría euclidiana como: Teorema de Pitágoras, criterios de congruencia y semejanza de triángulos, caracterizaciones de cuadriláteros concíclicos, entre otros. (C2M4, C4M2, C4M3)
 - 11 Emplea un sistema de coordenadas y algunos elementos básicos de geometría analítica como la distancia entre dos puntos en el plano para calcular áreas de figuras geométricas básicas y compara estos resultados con los cálculos obtenidos empleando principios básicos de geometría sintética. (C3M1)
 - 12 Modela situaciones y resuelve problemas significativos para el estudiantado tanto de manera algebraica como geométrica al aplicar propiedades básicas de funciones lineales, cuadráticas y polinomiales. (C3M2)
 - 13 Resuelve problemáticas provenientes de las áreas del conocimiento que involucren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y considera una interpretación geométrica de estos sistemas. (C3M3)
 - 14 Modela situaciones y resuelve problemas en los que se busca optimizar valores aplicando el teorema fundamental de la programación lineal y combinando elementos del lenguaje algebraico que conciernen al estudio de desigualdades y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (C2M4, C3M3, C4M3)

Progresiones de aprendizaje de Pensamiento Matemático III



- 1 Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo. (C2M1)
- 2 Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. (C4M1, C3M1)
- 3 Revisa situaciones y fenómenos donde el cambio es parte central en su estudio, con la finalidad de modelarlos aplicando algunos conocimientos básicos de funciones reales de variable real y las operaciones básicas entre ellas. (C3M2)
- 4 Analiza la gráfica de funciones de variable real buscando simetrías, y revisa conceptos como continuidad, crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidades, entre otros, resaltando la importancia de éstos en la modelación y el estudio matemático. (C2M1)
- 5 Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función. (C4M1, C1M1)
- 6 Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación. (C4M2)
- 7 Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, “la derivada”, de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales. (C1M2, C2M1)
- 8 Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos. (C1M3, C2M3)
- 9 Selecciona una problemática en la que el cambio sea un factor fundamental en su estudio para aplicar el concepto de la derivada como razón de cambio instantánea. (C3M2)
- 10 Explica y socializa el papel de la derivada para analizar una función (donde crece/decrece, máximo/mínimos locales, concavidades) y traza su gráfica. (C1M3, C2M4)
- 11 Resuelve problemas de su entorno o de otras áreas del conocimiento empleando funciones y aplicando la derivada (e.g. problemas de



optimización), organiza su procedimiento y lo somete a debate. (C3M3, C4M2)

- 12 Examina la gráfica de funciones logarítmicas con diferentes bases y las gráficas de las funciones exponenciales para describirlas y realizar afirmaciones sobre el significado de que la función exponencial y logarítmicas de base "a" sean funciones inversas entre sí. (C3M2)
- 13 Analiza y describe un fenómeno en el que la periodicidad sea un constituyente fundamental a través del estudio de propiedades básicas funciones trigonométricas. (C3M2)
- 14 Selecciona una problemática, situación o fenómeno tanto real como ficticio para modelarlo utilizando funciones derivables. (C3M4 C2M4, C4M3)
- 15 Considera y revisa algunas ideas subyacentes al teorema fundamental del cálculo. (C2M4)



VIII. Referencias documentales

- ACUERDO número 17/08/22 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública. DOF. (2022) Fecha de citación [01-02-2023]. Disponible en formato HTML:
https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5663344&fecha=02/09/2022#gsc.tab=0
- Arteaga, E. (s.f.). *Calidad y Creatividad en Educación Matemática*. Obtenido de http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_47/nr_503/a_6889/6889.html
- Cerda, J., & Valdivia, G. (s.f.). *John Snow, la epidemia de cólera y el nacimiento de la epidemiología moderna*. Revista chilena de infectología. Obtenido de https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0716-10182007000400014
- Chance, B., & Rossman, A. (2006). Using simulation to teach and learn statistics. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, 1-16.
- Cobb, P., & Bauersfeld, H. (2012). The Coordination of Psychological and Sociological Perspectives in Mathematics Education. En *The emergence of mathematical meaning* (págs. 11-26). Routledge.
- Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. (2020). *Repensar la evaluación para la mejora educativa: resultados de México en PISA 2018*. México.
- Deane, P., Sabatini, J., & O'Reilly, T. (2012). The CBAL English language arts (ELA) competency model and provisional learning progressions. Obtenido de <http://elap.cbalwiki.ets.org/Outline+of+Provisional+Learning+Progressions>
- Díaz Barriga, A. (s.f.). *Triángulo de Napoleón y cuadrados pitagóricos*. Obtenido de <https://drive.google.com/file/d/1GvDtXkvaRjIQCKe3VmIBR189eEyDrxie/view?usp=sharing>
- Díaz-Barriga, Á. (2013). *Un enfoque de competencias en la Educación ¿Una alternativa o un disfraz de cambio?* México: Perfiles Educativos. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/132/13211102.pdf>
- Díaz-Barriga, F. (2006). *Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida*. Ed. McGraw Hill.
- Eronen, L., Kokko, S., & Sormunen, K. (2019). Escaping the subject-based class: A Finnish case study of developing transversal competencies in a transdisciplinary course. *The Curriculum Journal*, 30(3), 264-278.
- García, B., & Botello, A. (2018). *Relación entre el pensamiento crítico y el desempeño académico en los alumnos de escuela preparatoria*. Educar.



- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (s.f.). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo OCCDM. Obtenido de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_2016_Modelo_CDM_SEIEM_M%C3%A1laga.pdf
- Hitt, F., & Quiroz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. *Revista colombiana de educación*, (73), 153-177.
- Kline, M. (1977). *El fracaso de la matemática moderna: ¿por qué Juanito no sabe sumar?* México: Siglo XXI Editores.
- Merino, A. (2016). *Inicio al Método ABN*. Obtenido de <https://colaboraeducacion30.juntadeandalucia.es/educacion/colabora/web/172922gt164>.
- Miranda, F. (2018). *Abandono escolar en educación media superior: conocimiento y aportaciones de política pública*. doi: [https://doi.org/10.31391/S2007-7033\(2018\)0051-010](https://doi.org/10.31391/S2007-7033(2018)0051-010)
- Miranda, M., & Navarrete, L. (2008). Semmelweis y su aporte científico a la medicina: Un lavado de manos salva vidas. *Revista chilena de infectología*. Obtenido de https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0716-10182008000100011
- NCTM. (2014). *Principios para la Acción*. Obtenido de https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Principles_to_Actions/PtAExecutiveSummary_Spanish.pdf
- OCDE. (2019). *Programa para la evaluación internacional de los alumnos*. Obtenido de https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf
- OECD. (2010). *Education working Papers*.
- Osuna, C., & López, K. D. (2020). El logro de los aprendizajes en matemáticas en PISA, ENLACE y PLANEA en adolescentes mexicanos. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7443998>
- Peña, J. A. (Ed.). (2002). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. México: Siglo XXI.
- Perelman, Y. (1969). *Álgebra Recreativa*. (E. MIR, Ed.)
- Rojano, M., & et., a. (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países*. INEE-CINESTAV.
- Rossman, A. J. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research*, 7(2), 5-19.
- Rossman, A. J., & Chance, B. L. (2011). *Workshop statistics: discovery with data*. John Wiley & Sons.
- SEP. (2017). *Aprendizajes Clave*. Obtenido de <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf>



- SEP. (2017). *Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la Educación Media Superior*. Obtenido de <http://www.sems.gob.mx/curriculoems/planes-de-estudio-de-referencia>
- SEP. (2018). *Planes de Estudio de Referencia del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Obtenido de <https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/241519/planes-estudio-sems.pdf>
- SEP. (2018). *Planes y programas de estudio para la Educación Básica*. Obtenido de <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/>
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Stewart, J. (2018). *Single variable calculus: Concepts and contexts*. Cengage Learning.
- Taguma, M., Gabriel, F., & Meow, H. (2019). *Future of Education and Skills 2030: Curriculum analysis: A Synthesis of Research on Learning Trajectories/Progressions in Mathematics*. Obtenido de <https://www.oecd.org/education/2030/A-Synthesis-of-Research-on-Learning-Trajectories-Progressions-in-Mathematics.pdf>



REDISEÑO DEL MARCO CURRICULAR COMÚN DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Asesoría técnica, académica y pedagógica

Juan Pablo Arroyo Ortiz
Adriana Olvera López

Irma Irene Bernal Soriano
Mariela Esquivel Solís
José Francisco Barrón Tovar
Adán Martínez Hernández
Víctor Florencio Ramírez Hernández
Ana Laura Soto Hernández

Rodrigo Salomón Pérez Hernández
Liliana Isela Robles Ponce
Ernesto Bartolucci Blanco
María Rosa Guadalupe H. Mondragón
Andrés Alonso Flores Marín
Alberto Hugo Parraguirre Covarrubias
Marina Guadalupe López Olivares
Alexis Haziel Ángeles Juárez.

Claudia Ivette Gaona Salado
María Elena Pérez Campuzano

Diseño gráfico

José Armando López Chávez
Jonatan Rodrigo Gómez Vargas

La construcción del MCCEMS no hubiera sido posible sin la valiosa contribución de múltiples voces y opiniones a lo largo del país. La Subsecretaría de Educación Media Superior agradece y reconoce a todos aquellos y aquellas que colaboraron en la construcción del MCCEMS con sus invaluable aportaciones.

Se autoriza la reproducción total o parcial de este documento, siempre y cuando se cite la fuente y no se haga con fines de lucro.

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Coordinación Sectorial de Fortalecimiento Académico

EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

